Amélioration de la robustesse de modèles réduits POD. Application au contrôle aérodynamique.

Michel Bergmann

L. Cordier, A. Iollo & C.-H. Bruneau

Michel.Bergmann@math.u-bordeaux1.fr

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES DE BORDEAUX Université Bordeaux 1

351 cours de la Libération

33405 TALENCE cedex, France

Plan de l'exposé

Optimisation de l'aérodynamique interne et externe d'un avion par *contrôle des écoulements* : un enjeu majeur pour le développement du transport aéronautique

- Optimisation aérodynamique
  - Augmentation de l'autonomie en vol
  - Diminution de la masse au décollage

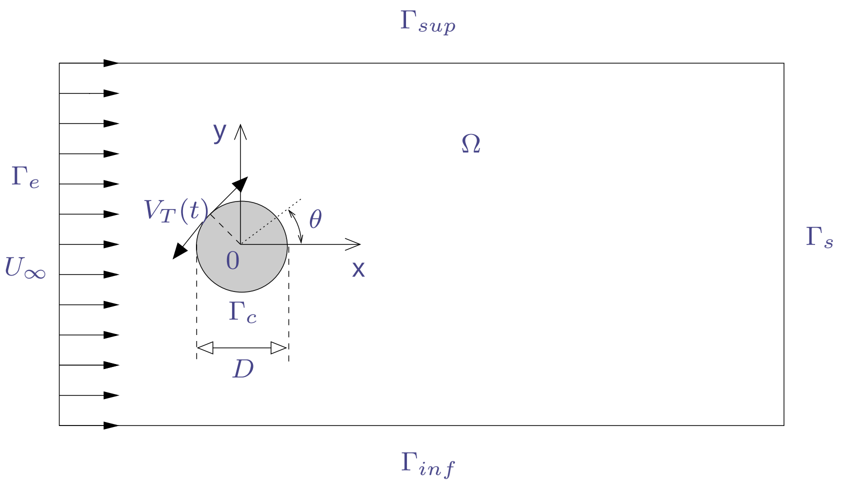
    $\hookrightarrow$ Réduction des coûts opérationnels
  - Réduction de l'émission de gaz polluant
  - Réduction de la nuisance sonore
  - Gain de manœuvrabilité
- Exemple chiffré
  - Réduction 1% consommation mondiale de fuel pour le transport aéronautique

    $\hookrightarrow$ gain de dépense de 1,25 millions de dollars par jour en coût opérationnel (valeur en 2002)

- Écoulement 2D autour d'un cylindre circulaire à $Re = 200$
- Fluide visqueux, incompressible et newtonien
- Oscillations du cylindre à une vitesse tangentielle

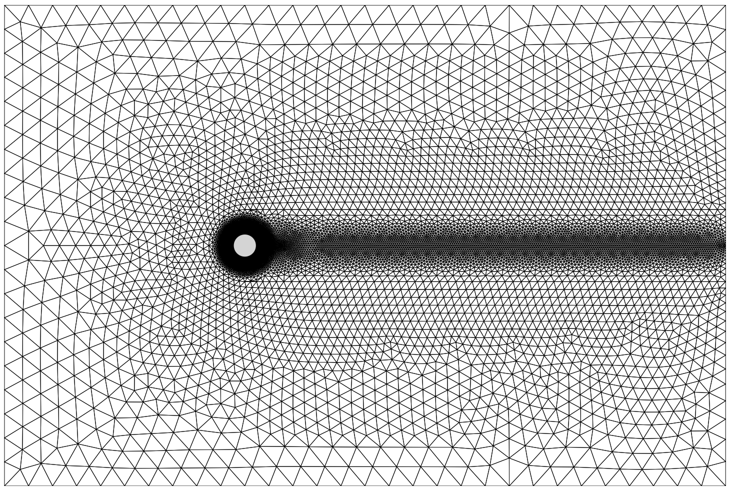
$$\gamma(t) = \frac{V_T}{U_\infty} = A \sin(2\pi St_f t)$$

Cas test : $A = 2$ *et* $St_f = 0,5$



Déterminer les paramètres $c = (A,\ St_f)^T$ qui minimisent le coefficient de traînée moyen

- Méthode à pas fractionnaires (correction de pression) en temps
- Éléments finis (P_1, P_1) en espace



Code de calcul développé par M.Braza et D. Ruiz (IMFT-ENSEEIHT).

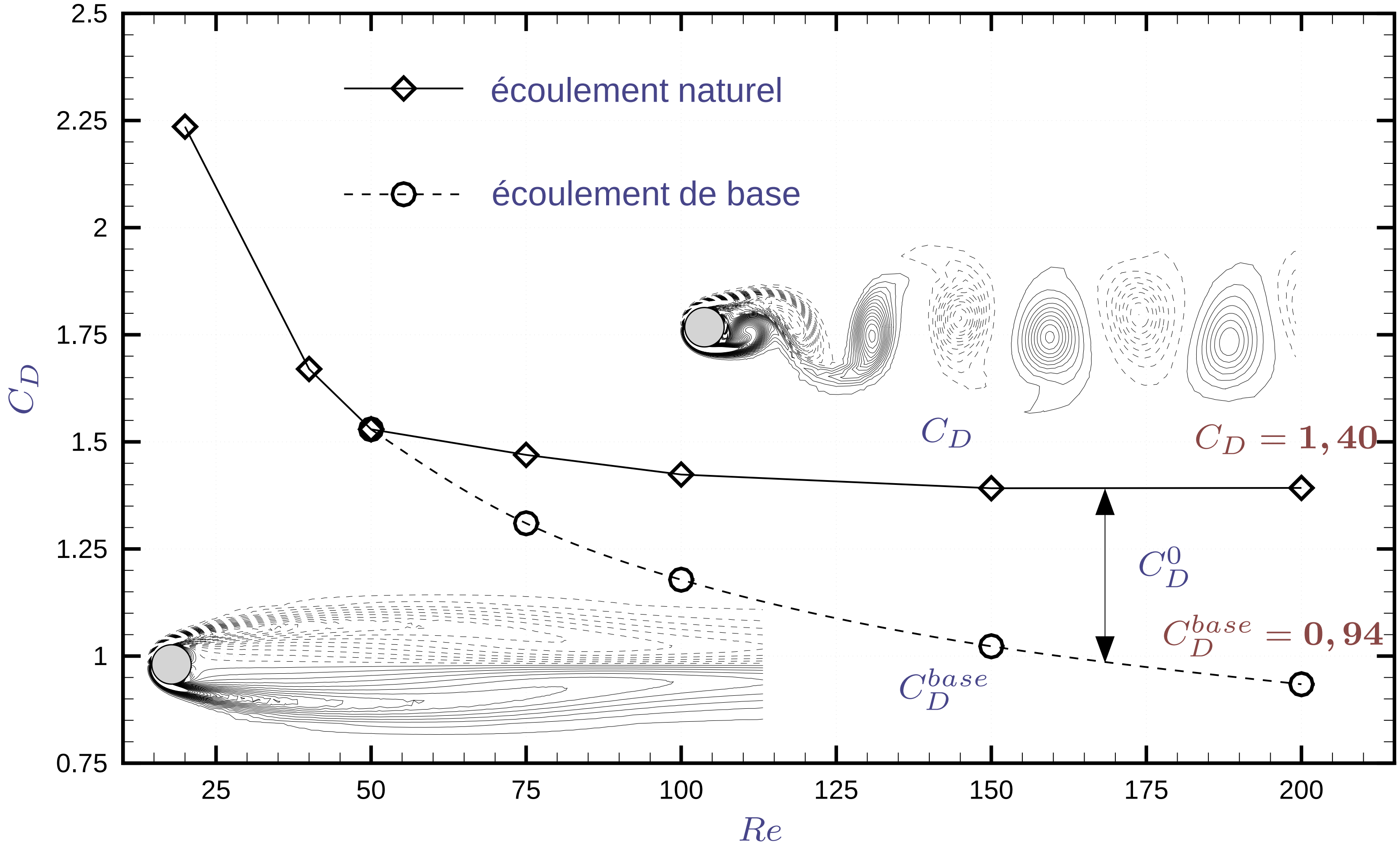


Fig. : *Evolution du coefficient de traînée moyen en fonction du nombre de Reynolds. Comparaison entre l'écoulement naturel et l'écoulement de base stationnaire instable.*

Protas, B. et Wesfreid, J.E. (2002) : Drag force in the open-loop control of the cylinder wake in the laminar regime. *Phys. Fluids*, **14**(2), pp. 810-826.

I - Etude paramétrique *Coefficient de traînée moyen*

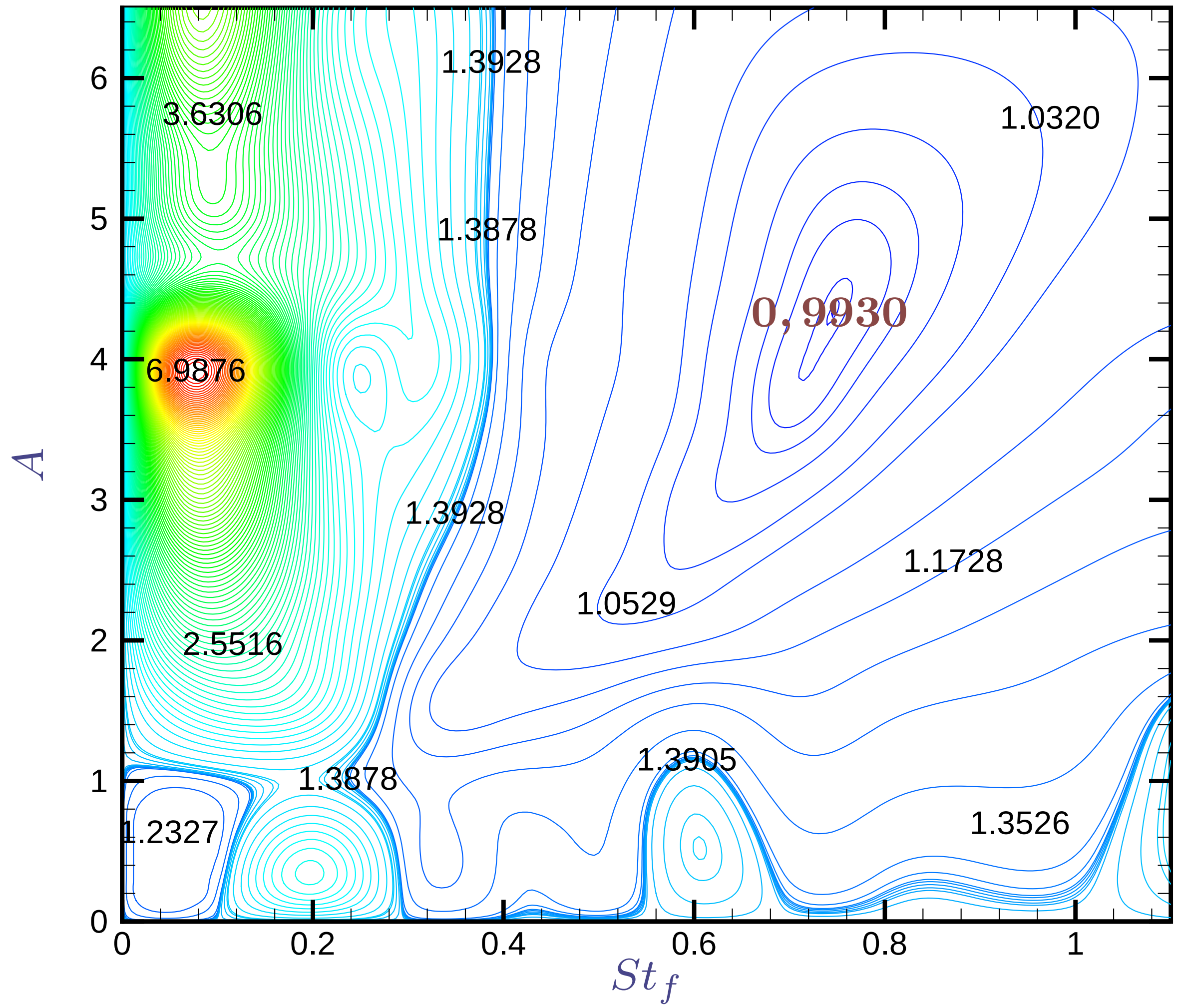


Fig. : *Coefficient de traînée moyen en fonction de l'amplitude et de la fréquence de forçage.*

Minimum (global ?) : $C_D = 0,9930$ pour $A = 4,25$ et $St_f = 0,74$.

I - Théorie du contrôle optimal *Définition*

Méthode mathématique permettant de déterminer sans empirisme une loi de commande à partir de l'optimisation d'une fonctionnelle coût.

- Equations d'état $\mathcal{F}(\phi, c) = 0$;

  (Navier-Stokes + C.I. + C.L.)

- Variables de contrôle c ;

  (Soufflage/aspiration, paramètres de forme, ...)

- Fonctionnelle objectif $\mathcal{J}(\phi, c)$.

  (Traînée, portance, ...)

Déterminer les variables de contrôle c et les variables d'état ϕ telles que la fonctionnelle objectif $\mathcal{J}(\phi, c)$ soit minimale ou maximale sous les contraintes $\mathcal{F}(\phi, c) = 0$.

I - Théorie du contrôle optimal *Multiplicateurs de Lagrange*

Optimisation avec contraintes $\Rightarrow$ optimisation sans contraintes

- Introduction de multiplicateurs de Lagrange ξ (pour chaque contrainte active).
- Fonctionnelle de Lagrange : $\mathcal{L}(\phi, c, \xi) = \mathcal{J}(\phi, c) - < \mathcal{F}(\phi, c), \xi >$.
- Problème : rendre $\mathcal{L}$ "stationnaire" $\Rightarrow$ déterminer $\delta\mathcal{L} = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\delta\phi + \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial c}\delta c + \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi}\delta\xi = 0$.
- Hypothèse : ϕ, c et ξ indépendantes : $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\delta\phi = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial c}\delta c = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi}\delta\xi = 0$.

$\hookrightarrow$ *Solution de* $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi}\delta\xi = 0$: équations d'état $\mathcal{F}(\phi, c) = 0$.

$\hookrightarrow$ *Solution de* $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\delta\phi = 0$: équations adjointes $\left(\dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial \phi}\right)^* \xi = \left(\dfrac{\partial \mathcal{J}}{\partial \phi}\right)^*$.

$\hookrightarrow$ *Solution de* $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial c}\delta c = 0$: conditions d'optimalité $\left(\dfrac{\partial \mathcal{J}}{\partial c}\right)^* = \left(\dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial c}\right)^* \xi$.

$\Rightarrow$ Assure un extremum local (minimum)

$\Rightarrow$ Méthode de résolution coûteuse en temps CPU

et mémoire pour des systèmes de grandes tailles !

"without an inexpensive method for reducing the cost of flow computations, it is unlikely that the solution of optimization problems involving the three dimensional unsteady Navier-Stokes system will become routine"

M. Gunzburger, 2000

▶ Proper Orthogonal Decomposition (POD), Lumley (1967).

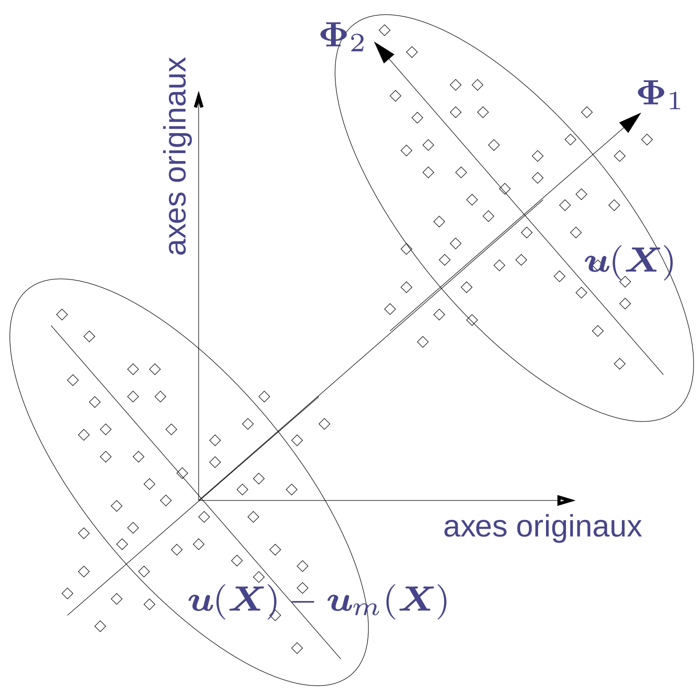
▶ Rechercher la réalisation $\mathbf{\Phi}(\boldsymbol{X})$ "ressemblant le plus" en moyenne aux réalisations $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X})$. ($\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x}, t) \in \mathcal{D} = \Omega \times \mathbb{R}^+$)

▶ $\mathbf{\Phi}(\boldsymbol{X})$ solution du problème :

$$\max_{\mathbf{\Phi}} \langle |(\boldsymbol{u}, \mathbf{\Phi})|^2 \rangle, \quad \|\mathbf{\Phi}\|^2 = 1.$$

▶ Convergence optimale *en norme* L^2 (énergie) de $\mathbf{\Phi}(\boldsymbol{X})$

$\Rightarrow$ réduction de dynamique envisageable.



Lumley J.L. (1967) : The structure of inhomogeneous turbulence. *Atmospheric Turbulence and Wave Propagation*, ed. A.M. Yaglom & V.I. Tatarski, pp. 166-178.

- Equivalence avec une équation intégrale de Fredholm :

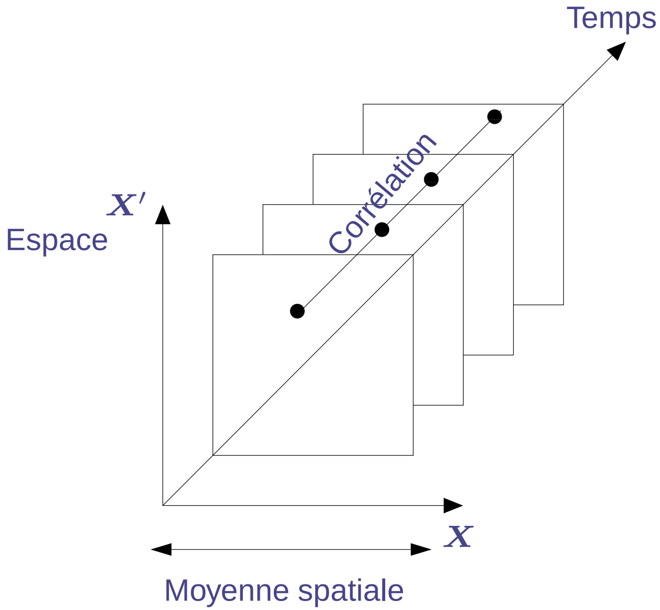
$$\int_{\mathcal{D}} R_{ij}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{X'})\Phi_n^{(j)}(\boldsymbol{X'})\,d\boldsymbol{X'} = \lambda_n \Phi_n^{(i)}(\boldsymbol{X}) \qquad n = 1,..,N_{POD}$$

$\hookrightarrow R(\boldsymbol{X},\boldsymbol{X'})$: *tenseur des corrélations spatio-temporelles.*

- Méthode des snapshots, Sirovich (1987) :

$$\int_T C(t,t')a_n(t')\,dt' = \lambda_n a_n(t)$$

$\hookrightarrow C(t,t')$: *corrélations temporelles.*



- $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$ base de l'écoulement :

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = \sum_{n=1}^{N_{POD}} a_n(t)\boldsymbol{\Phi}_n(\boldsymbol{x}).$$

Sirovich L. (1987) : Turbulence and the dynamics of coherent structures. Part 1,2,3 *Quarterly of Applied Mathematics*, **XLV** N$^\circ$ 3, pp. 561–571.

I - Réduction de modèle *Réduction d'ordre de la base POD*

- Contenu énergétique relatif : $RIC(M) = \sum_{k=1}^{M} \lambda_k \Big/ \sum_{k=1}^{N_{POD}} \lambda_k$

Objectif : réaliser une troncature dans la base POD en conservant 99% de l'énergie relative

- Cas test : $A = 2$ et $St_f = 0,5 \Rightarrow N_{POD} = 361$ réalisations sur $T = 18$

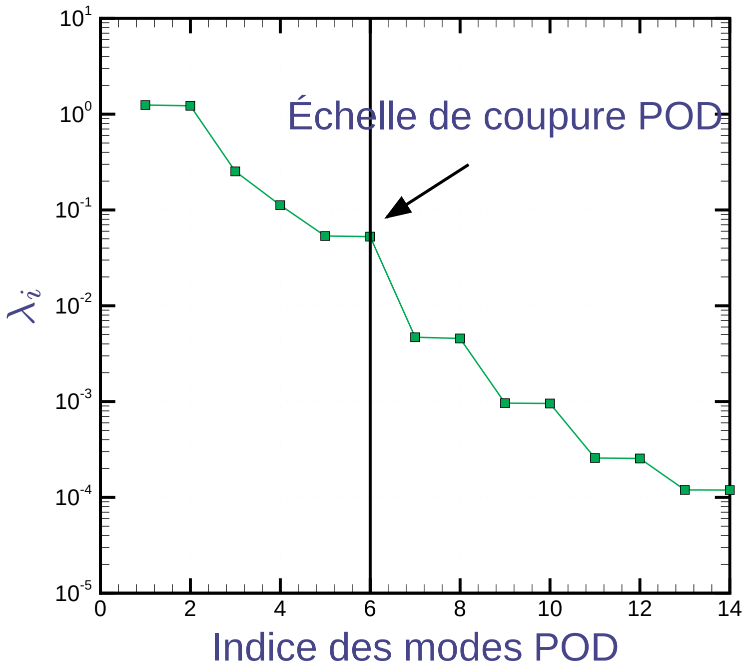


Fig. : *Spectre énergétique et échelle de coupure POD.*

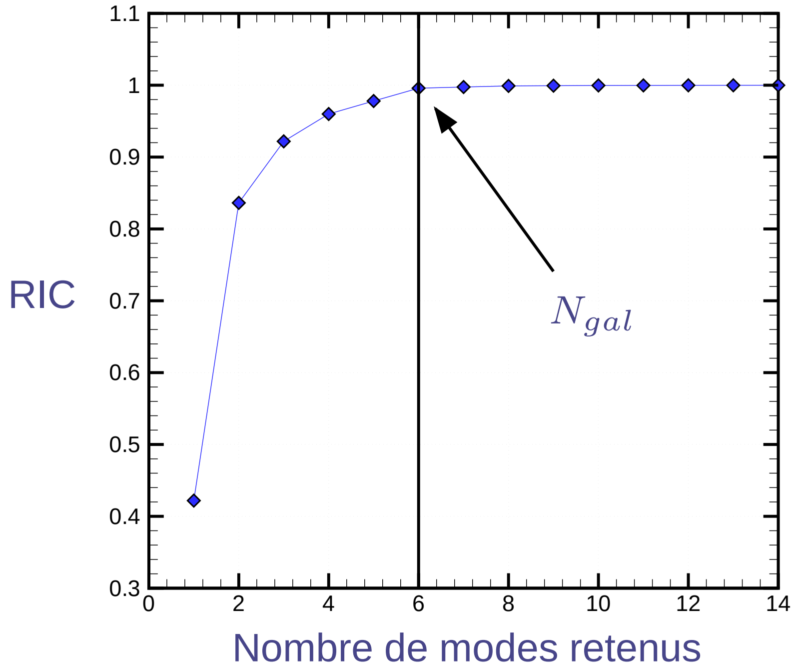


Fig. : *Énergie cinétique relative en fonction du nombre M de modes POD retenus.*

$$N_{gal} = \arg\min_{M} RIC(M) \text{ t.q. } RIC(N_{gal}) > 99\% \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{N_{gal} = 6}\,!$$

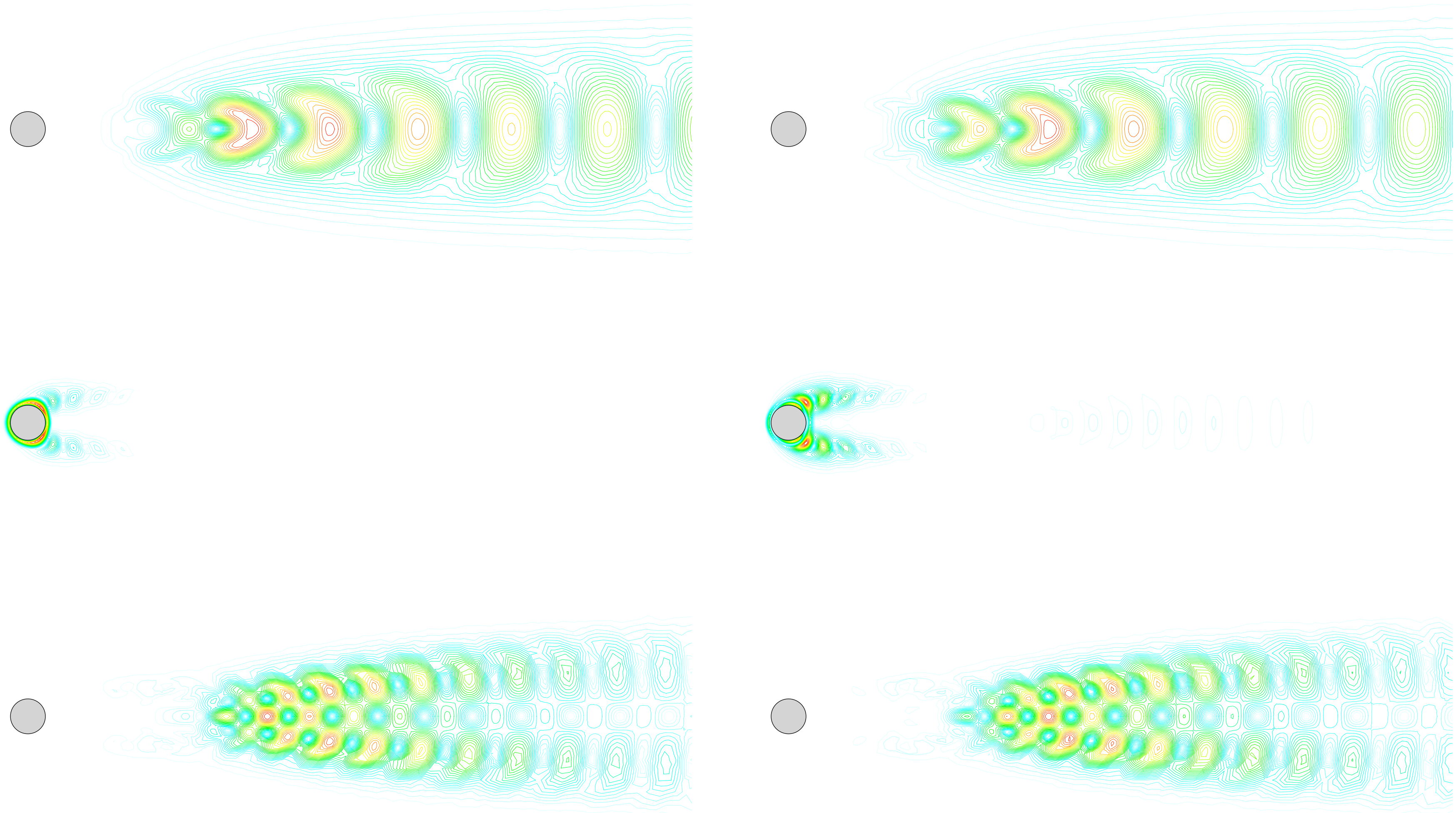


Fig. : *Représentation des 6 premiers modes POD de fluctuations autour du champ moyen* $\gamma(t) = A\sin(2\pi St_f t)$ *avec* $A = 2$ *et* $St_f = 0,5$*.*

- Projection de Galerkin des équations de Navier-Stokes sur la base POD :

$$\left(\boldsymbol{\Phi}_i,\, \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u}\right) = \left(\boldsymbol{\Phi}_i,\, -\boldsymbol{\nabla} p + \frac{1}{Re}\Delta \boldsymbol{u}\right).$$

- Intégration par parties (formule de Green) :

$$\begin{aligned}\left(\boldsymbol{\Phi}_i,\, \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u}\right) &= (p,\, \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\Phi}_i) - \frac{1}{Re}\left((\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{\Phi}_i)^T,\, \boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{u}\right) \\ &\quad - [p\, \boldsymbol{\Phi}_i] + \frac{1}{Re}[(\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{u})\boldsymbol{\Phi}_i].\end{aligned}$$

avec $[\boldsymbol{a}] = \int_\Gamma \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n}\, d\boldsymbol{x}$ et $(\overline{\overline{A}}, \overline{\overline{B}}) = \int_\Omega \overline{\overline{A}} : \overline{\overline{B}}\, d\Omega = \sum_{i,\,j} \int_\Omega A_{ij} B_{ji}\, d\boldsymbol{x}$.

- Termes de pression "indésirables" : $\Rightarrow$ élimination

- Décomposition du champ de vitesse sur N_{POD} modes :

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{u}_m(\boldsymbol{x}) + \gamma(t)\,\boldsymbol{u}_c(\boldsymbol{x}) + \sum_{k=1}^{N_{POD}} a_k(t)\boldsymbol{\Phi}_k(\boldsymbol{x}).$$

- Système dynamique réduit avec N_{gal} $(\ll N_{POD})$ modes retenus :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\,a_i(t)}{d\,t} =& \mathcal{A}_i + \sum_{j=1}^{N_{gal}} \mathcal{B}_{ij}\,a_j(t) + \sum_{j=1}^{N_{gal}}\sum_{k=1}^{N_{gal}} \mathcal{C}_{ijk}\,a_j(t)a_k(t) \\ & + \mathcal{D}_i\,\frac{d\,\gamma}{d\,t} + \left(\mathcal{E}_i + \sum_{j=1}^{N_{gal}} \mathcal{F}_{ij}\,a_j(t)\right)\gamma + \mathcal{G}_i\gamma^2 \\ a_i(0) =& (\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\,0),\,\boldsymbol{\Phi}_i(\boldsymbol{x})). \end{aligned}\right.$$

$\mathcal{A}_i$, $\mathcal{B}_{ij}$, $\mathcal{C}_{ijk}$, $\mathcal{D}_i$, $\mathcal{E}_i$, $\mathcal{F}_{ij}$ et $\mathcal{G}_i$ dépendent uniquement de $\boldsymbol{\Phi}$, $\boldsymbol{u}_m$, $\boldsymbol{u}_c$ et Re.

Cas test : $\gamma = A\sin(2\pi St_f t)$, $A = 2$ et $St_f = 0,5$.

Erreurs de reconstruction POD ROM $\Rightarrow$ amplification temporelle des modes

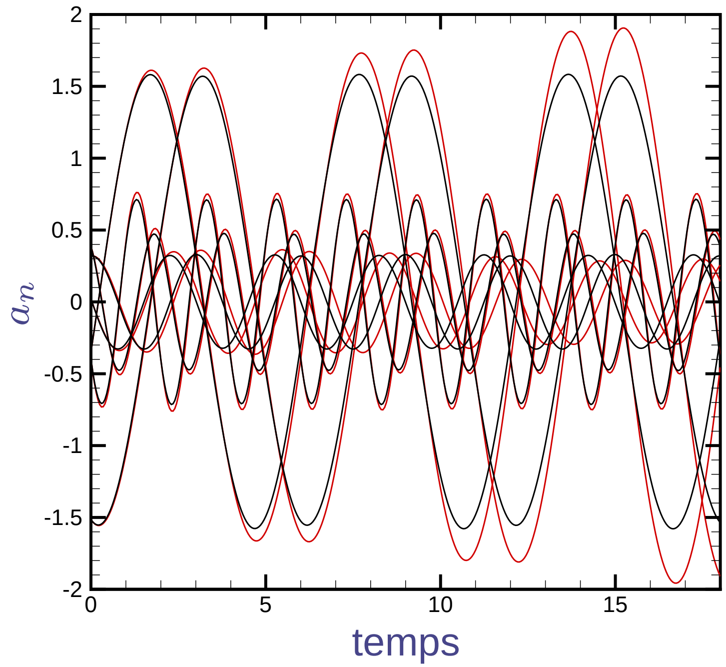


Fig. : *Evolution temporelle des 6 premiers modes POD.*

- Causes :
  - Extraction des grosses et moyennes structures porteuses d'énergie
  - Essentiel de dissipation dans les petites structures
- Solution :
  - Ajout de viscosités artificielles optimales sur chaque mode POD

—— projection (Navier-Stokes) : $a_{\tau n}(t)$
—— prédiction avant stabilisation (POD ROM)

Cas test : $\gamma = A\sin(2\pi St_f t)$, $A = 2$ et $St_f = 0,5$.

Erreurs de reconstruction POD ROM $\Rightarrow$ amplification temporelle des modes

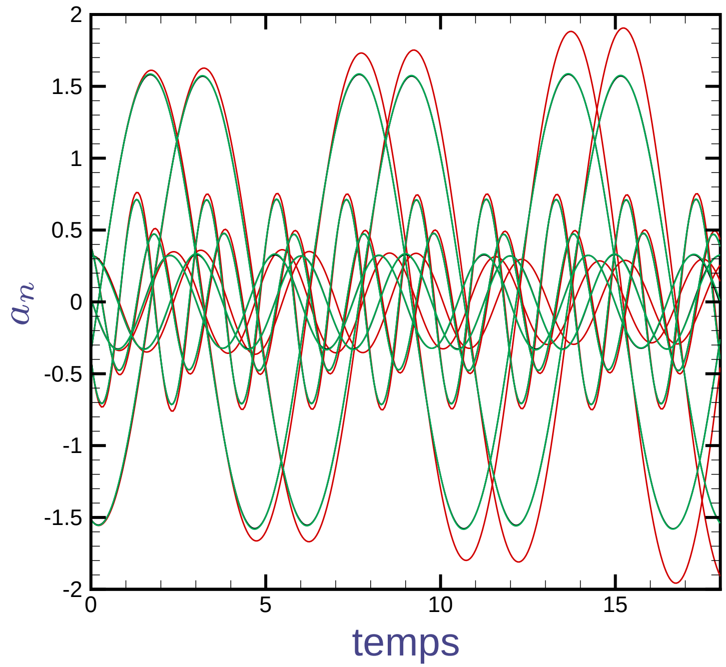


Fig. : *Evolution temporelle des 6 premiers modes POD.*

- Causes :
  - Extraction des grosses et moyennes structures porteuses d'énergie
  - Essentiel de dissipation dans les petites structures
- Solution :
  - Ajout de viscosités artificielles optimales sur chaque mode POD

——— projection (Navier-Stokes) : $a_{\tau n}(t)$
——— prédiction avant stabilisation (POD ROM)
——— prédiction après stabilisation (POD ROM).

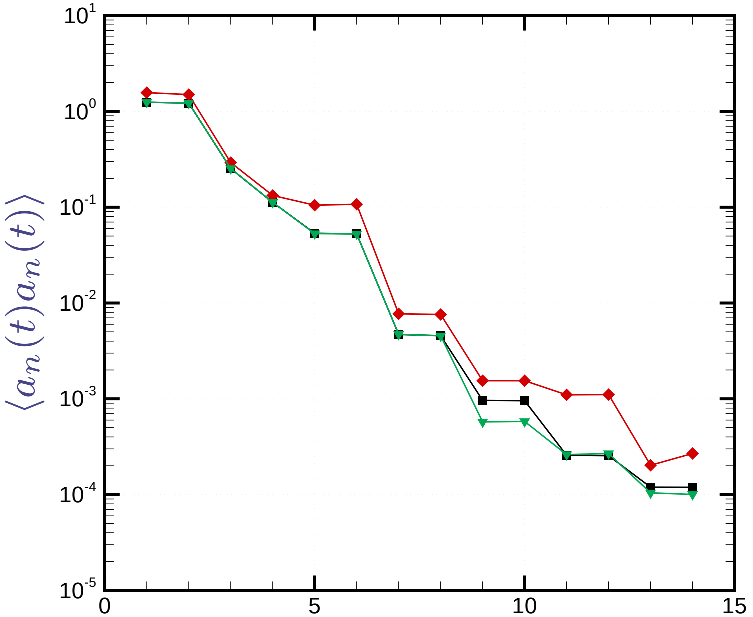


Fig. : *Comparaison du contenu énergétique de chaque mode POD estimé respectivement par DNS et par POD ROM.*

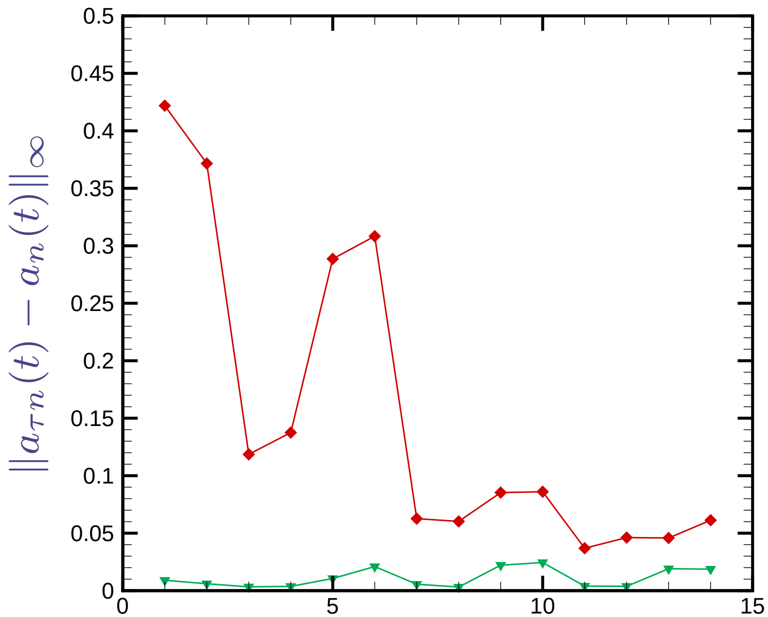
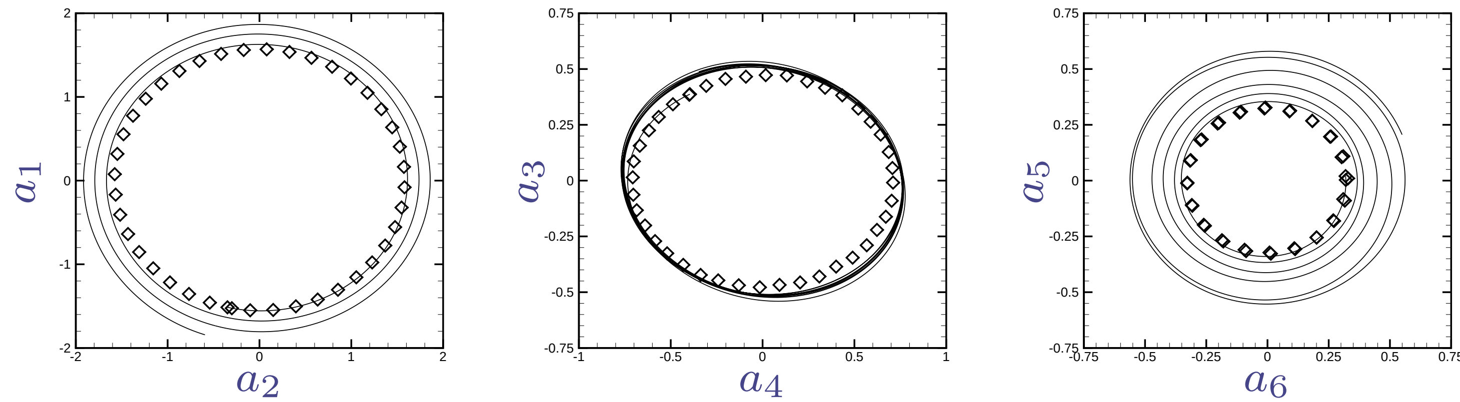


Fig. : *Erreur en norme infinie du contenu énergétique de chaque mode POD avant et après stabilisation.*

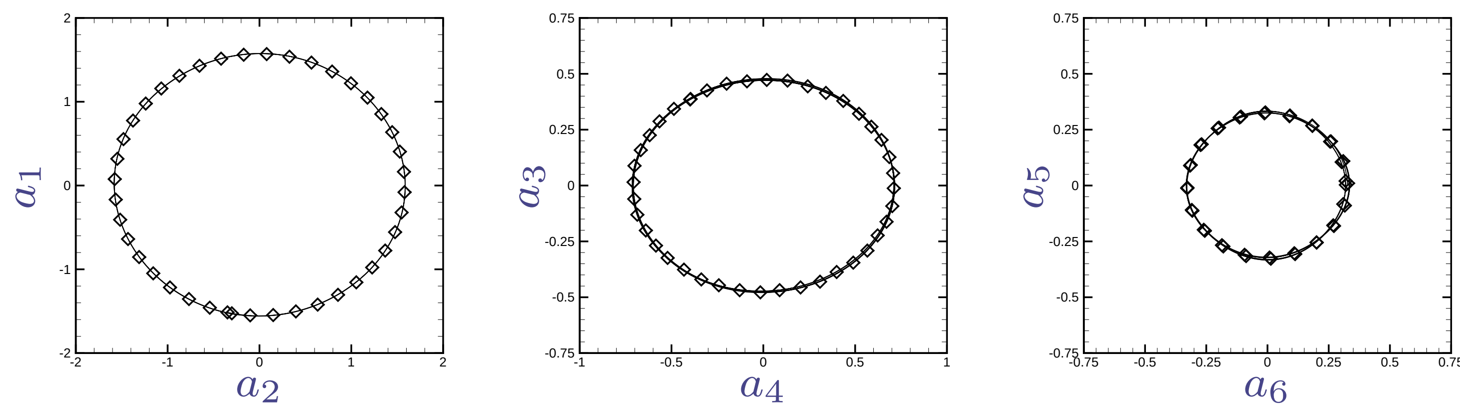
▶ Bonne concordance entre spectres POD ROM et DNS

▶ Réduction de l'erreur de reconstruction entre les modes prédits (POD ROM) et projetés (DNS)

$\Rightarrow$ Validation du modèle réduit POD



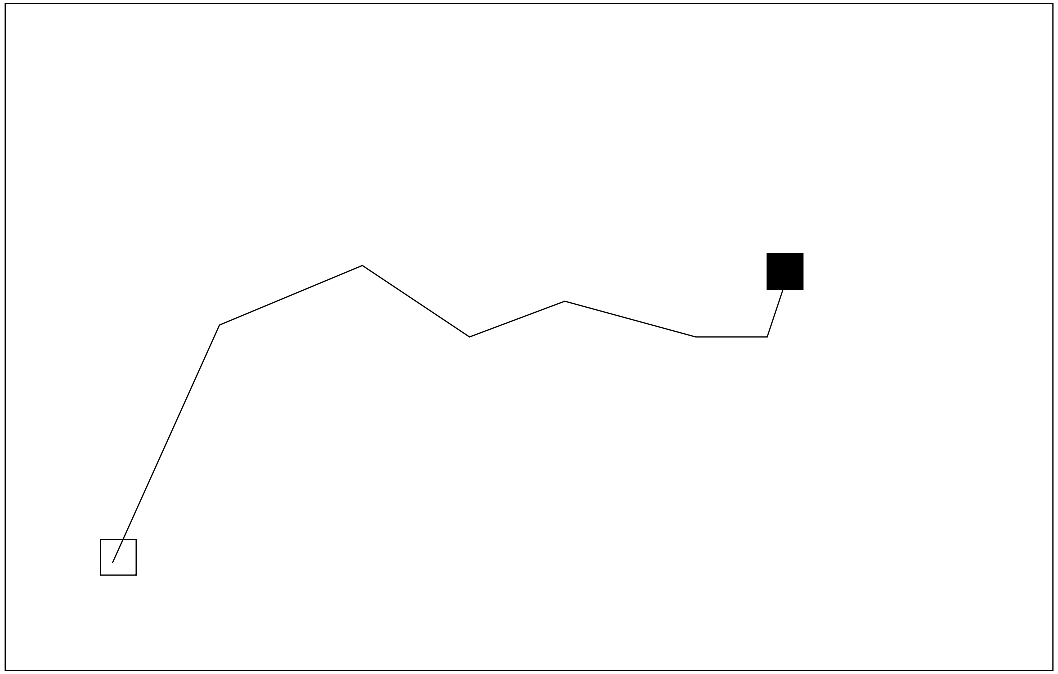
Sans ajout de viscosités artificielles.



Avec ajout de viscosités artificielles.

Fig. : *Portraits de phase des 6 premiers coefficients temporels a_n sur 18 unités de temps.*
$\diamondsuit$ *modes DNS ; —— modes POD.*

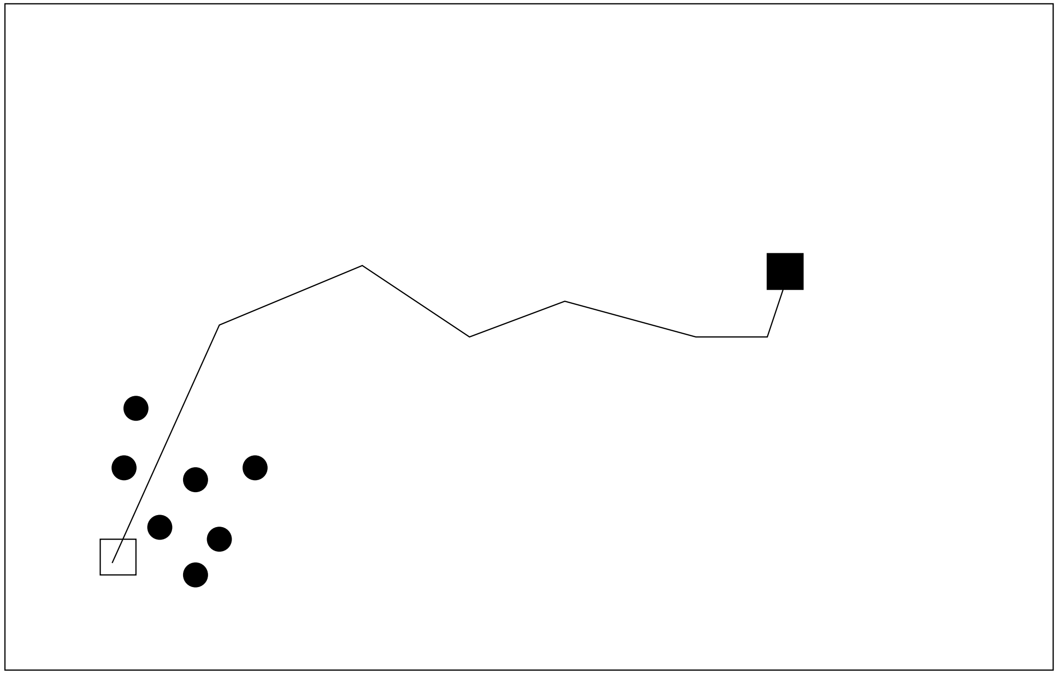
Le modèle réduit POD représente correctement *une unique* dynamique : manque de robustesse ...



Configuration générale.

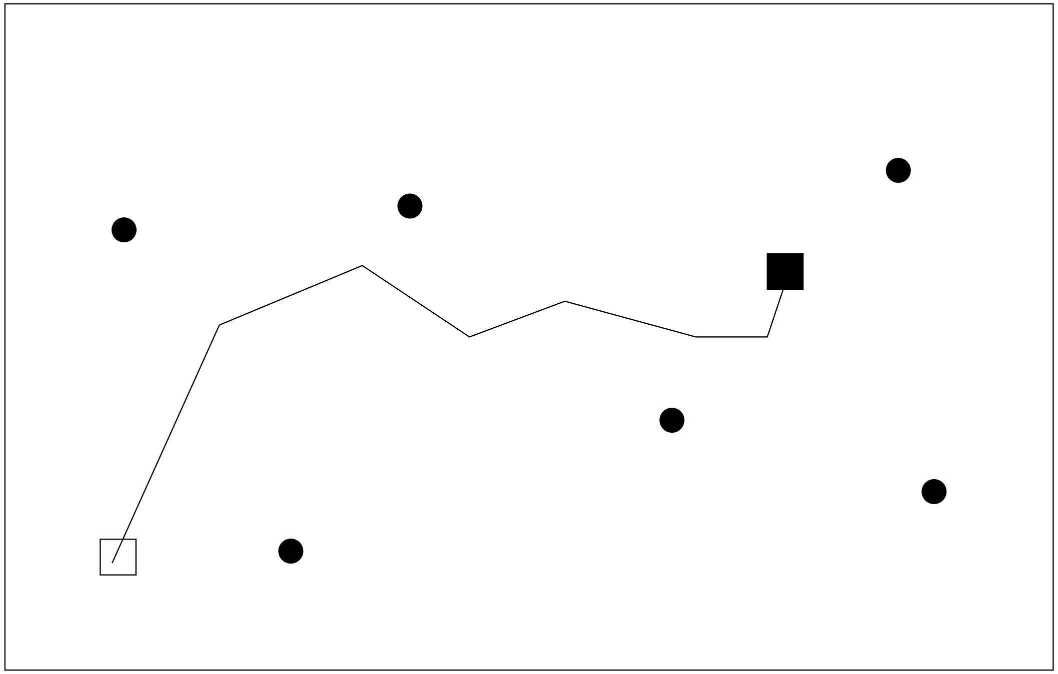
Fig. : *Problème d'optimisation posé dans l'espace des paramètres de contrôle.*

—— *chemin d'optimisation, conditions initiale* □ *et terminale* ■ *du processus d'optimisation.*



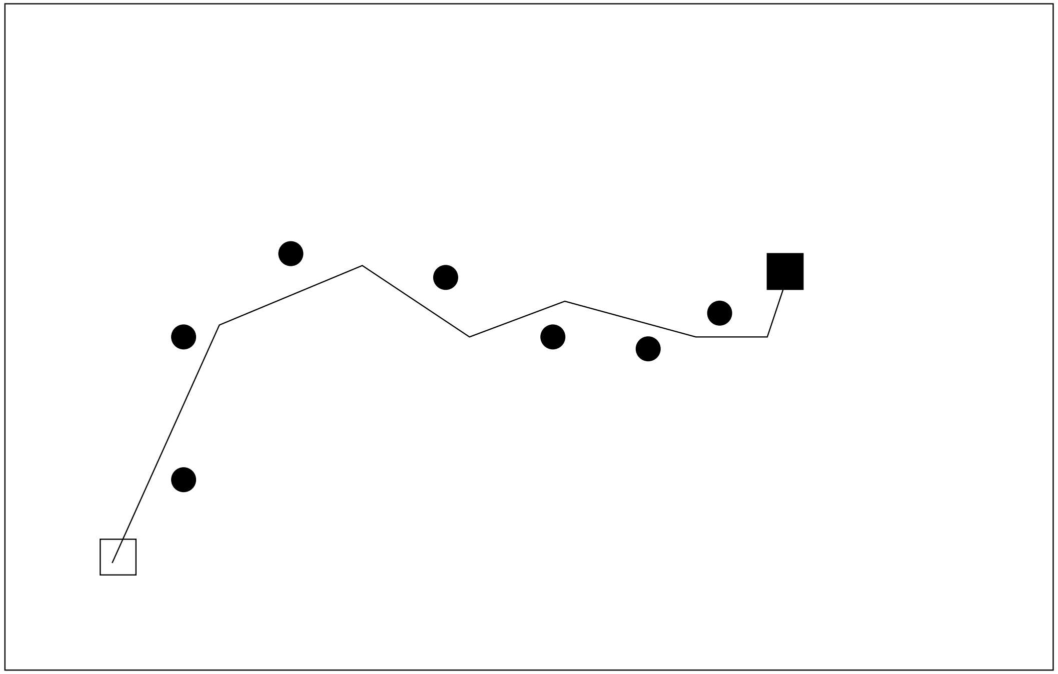
Echantillonnage inadapté.

Fig. : *Problème d'optimisation posé dans l'espace des paramètres de contrôle.*
—— *chemin d'optimisation, conditions initiale □ et terminale ■ du processus d'optimisation,*
• *réalisation utilisée pour la base de données.*



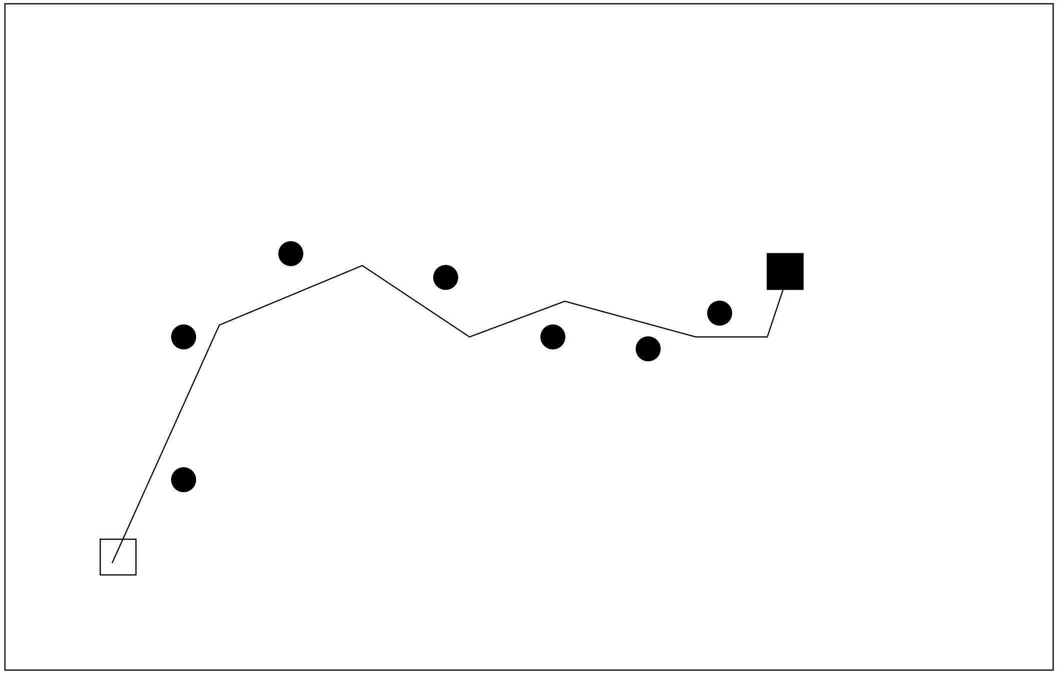
Echantillonnage inadapté.

Fig. : *Problème d'optimisation posé dans l'espace des paramètres de contrôle.*
—— chemin d'optimisation, conditions initiale □ et terminale ■ du processus d'optimisation,
• réalisation utilisée pour la base de données.



Echantillonnage idéal.

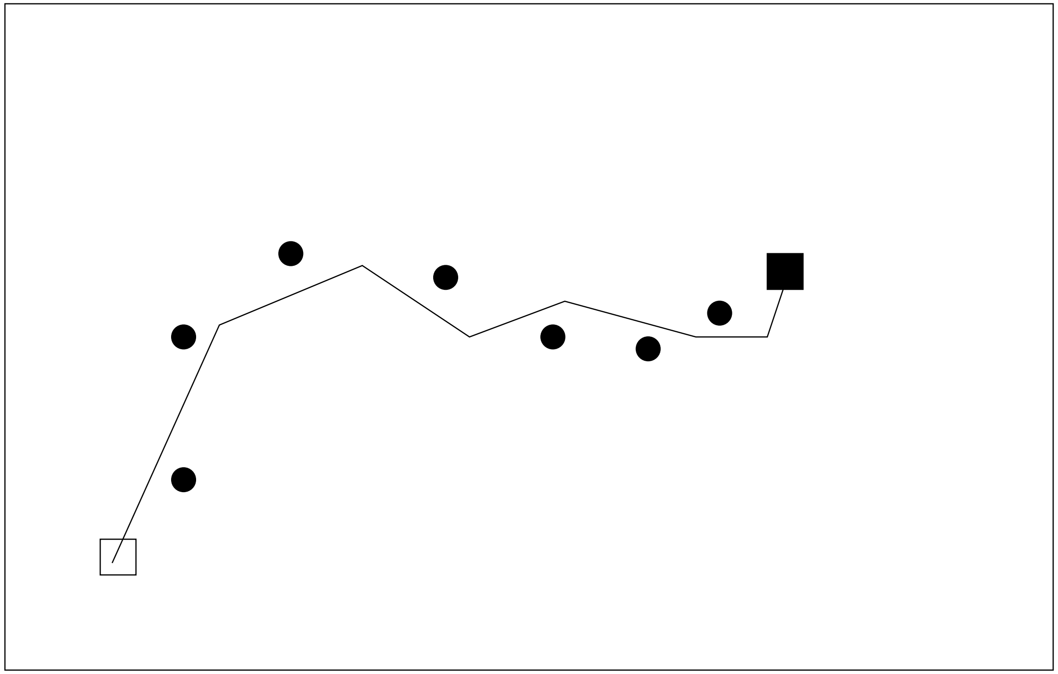
Fig. : *Problème d'optimisation posé dans l'espace des paramètres de contrôle.*
—— *chemin d'optimisation, conditions initiale* □ *et terminale* ■ *du processus d'optimisation,*
• *réalisation utilisée pour la base de données.*



Echantillonnage idéal.

Fig. : *Problème d'optimisation posé dans l'espace des paramètres de contrôle.*
—— *chemin d'optimisation, conditions initiale □ et terminale ■ du processus d'optimisation,*
• *réalisation utilisée pour la base de données.*

- La base représente toutes les dynamiques le long du chemin d'optimisation
  II - Optimisation sans réactualisation de la base POD
  [Bergmann *et al.*, Phys. Fluids, **17** (9), 2005]



Echantillonnage idéal.

Fig. : *Problème d'optimisation posé dans l'espace des paramètres de contrôle.*
—— *chemin d'optimisation, conditions initiale* □ *et terminale* ■ *du processus d'optimisation,*
● *réalisation utilisée pour la base de données.*

- La base représente toutes les dynamiques le long du chemin d'optimisation
  II - Optimisation sans réactualisation de la base POD
  [Bergmann *et al.*, Phys. Fluids, **17** (9), 2005]
- La base ne représente qu'une dynamique contrôlée particulière
  III - Optimisation avec réactualisation de la base POD

II - Base POD non réactualisée *Présentation*

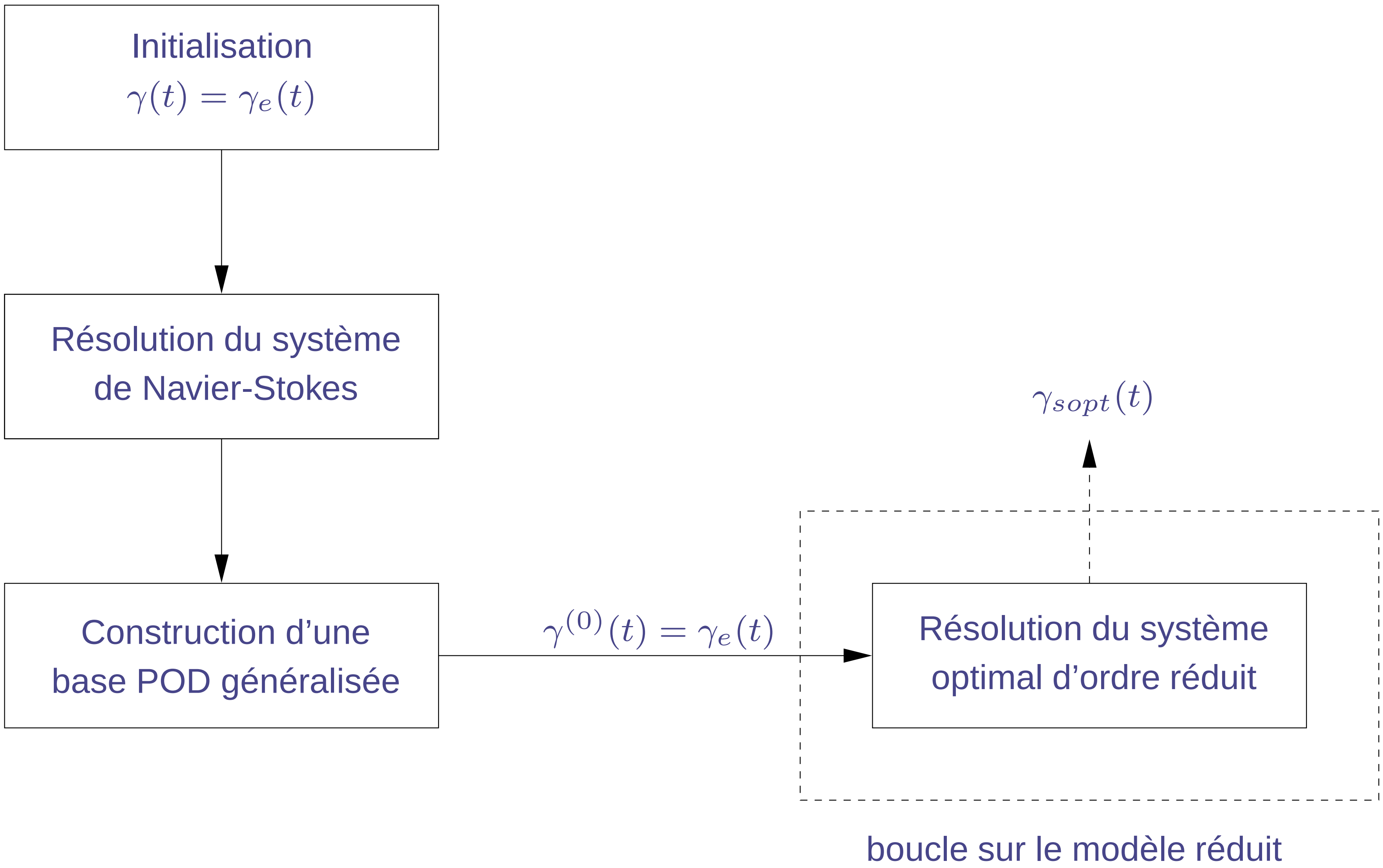


Fig. : *Représentation schématique de la méthode d'optimisation sans réactualisation de la base POD.*

Objectif : minimiser l'instationnarité du sillage.

- Fonctionnelle coût :

$$\mathcal{J}(\boldsymbol{a}, \gamma(t)) = \int_0^T J(\boldsymbol{a}, \gamma(t))\, dt = \int_0^T \left(\sum_{i=1}^{N_{gal}} {a_i}^2(t) + \frac{\alpha}{2}\gamma^2(t) \right) dt.$$

α : paramètre de régularisation (pénalisation).

- Equations adjointes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d\,\xi_i(t)}{dt} = -\displaystyle\sum_{j=1}^{N_{gal}} \left(\mathcal{B}_{ji} + \gamma\,\mathcal{F}_{ji} + \sum_{k=1}^{N_{gal}} \left(\mathcal{C}_{jik} + \mathcal{C}_{jki} \right) a_k \right) \xi_j(t) - 2a_i \\ \xi_i(T) = 0. \end{array} \right.$$

- Condition d'optimalité :

$$\delta\gamma(t) = -\sum_{i=1}^{N_{gal}} \mathcal{D}_i \frac{d\xi_i}{dt} + \sum_{i=1}^{N_{gal}} \left(\mathcal{E}_i + \sum_{j=1}^{N_{gal}} \mathcal{F}_{ij} a_j + 2\mathcal{G}_i \gamma(t) \right) \xi_i + \alpha\gamma(t).$$

II - Base POD non réactualisée *Résolution du système optimal*

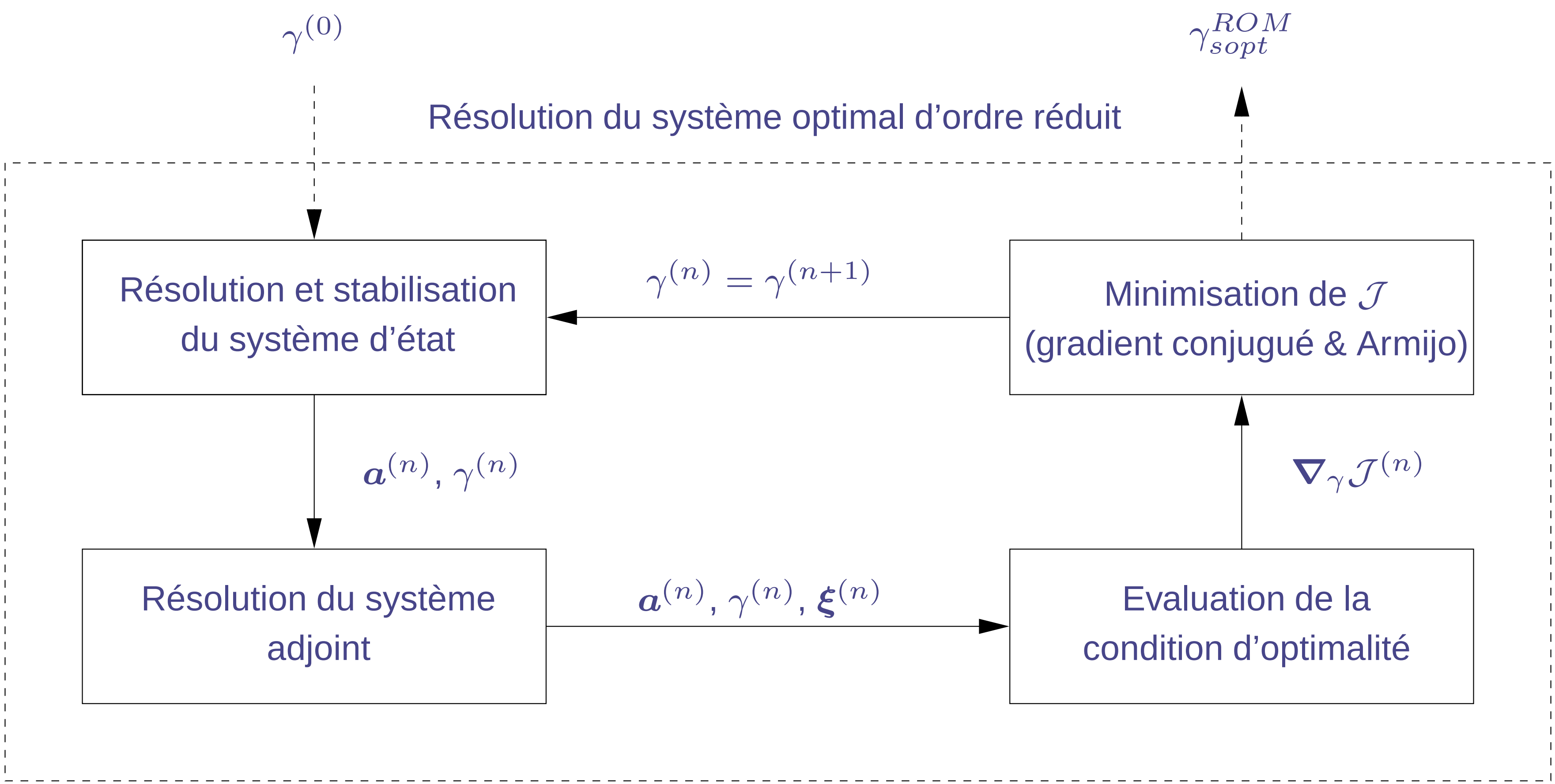


Fig. : *Représentation schématique du processus de résolution du système optimal d'ordre réduit.*

II - Base POD non réactualisée *Généralités*

▶ Pas de réactualisation de la base POD.

▶ Représentativité énergétique *a priori* différente de représentativité dynamique :

$\hookrightarrow$ inconvénient possible pour le contrôle.

$\hookrightarrow$ un système POD représente *a priori* uniquement une dynamique proche de celle utilisée pour le générer.

▶ Construction d'une base POD généralisée représentative d'une plus large gamme de dynamique :

$\hookrightarrow$*excitation d'un plus grand nombre de degrés de liberté par balayage en amplitudes et en fréquences de* $\gamma(t)$.

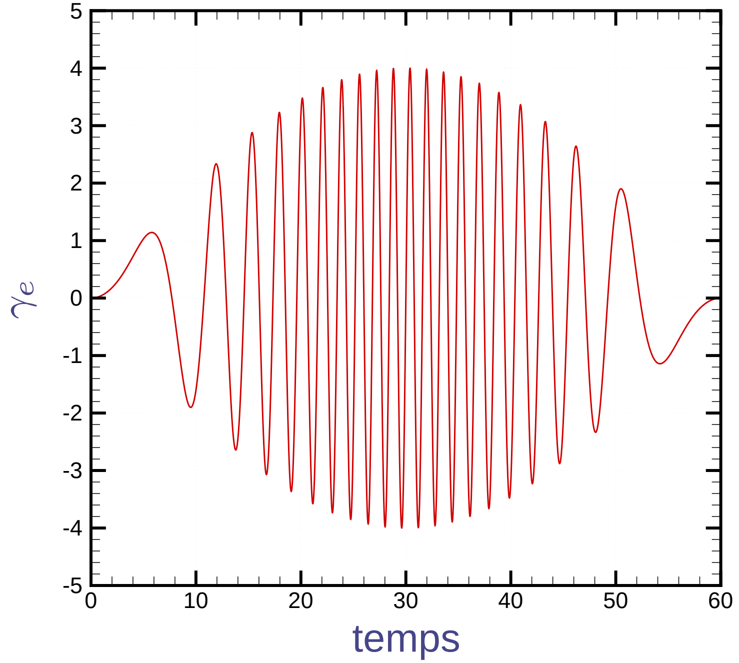


Fig. : *Excitation temporelle γ_e imposée au cylindre.*

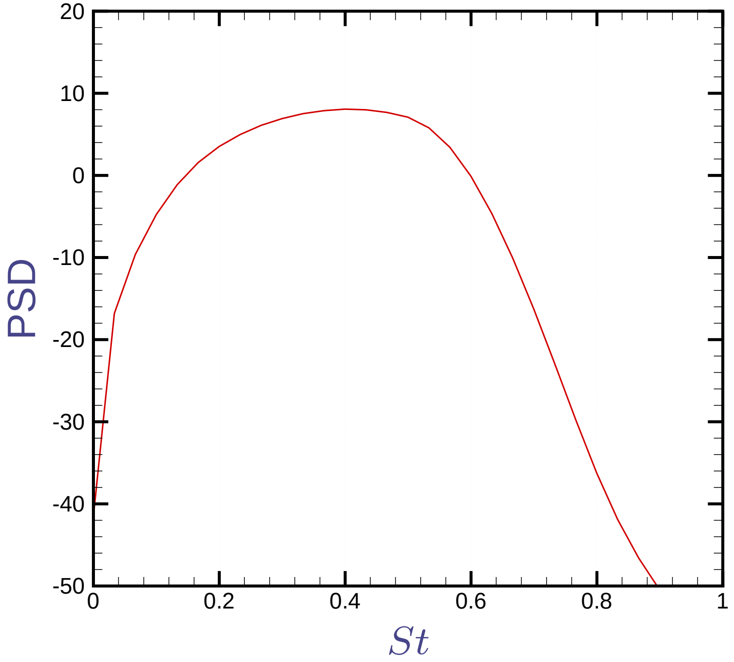


Fig. : *Densité spectrale de puissance de l'excitation temporelle γ_e.*

$$\gamma_e(t) = A_1 \sin(2\pi St_1\, t) \times \sin(2\pi St_2\, t - A_2 \sin(2\pi St_3\, t))$$

avec $A_1 = 4$, $A_2 = 18$, $St_1 = 1/120$, $St_2 = 1/3$ et $St_3 = 1/60$.

- $0 \leq$ amplitudes ≤ 4 et analyse de Fourier $\Rightarrow 0 \leq$ fréquences $\leq 0,8$
- γ_e loi de contrôle initiale dans processus itératif.

II - Base POD non réactualisée *Energie*

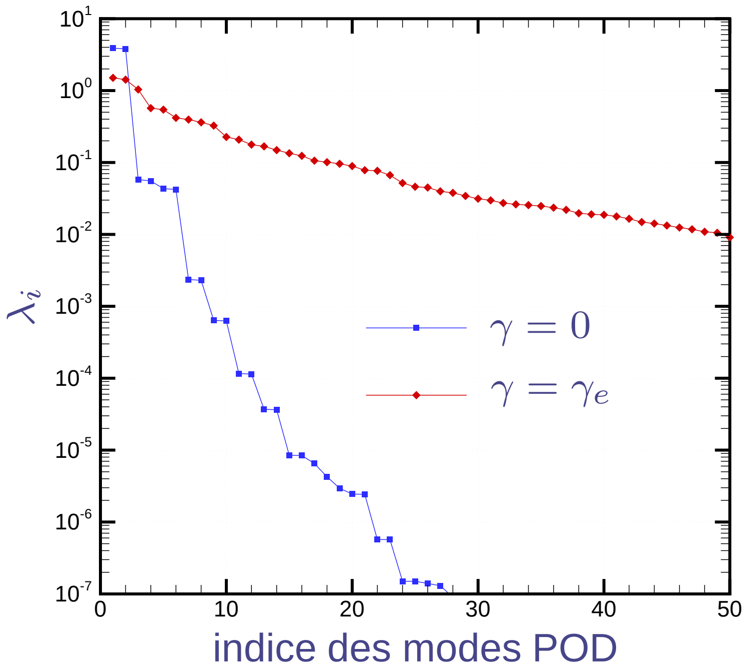


Fig. : *Comparaison des spectres de valeurs propres pour l'écoulement non contrôlé ($\gamma = 0$) et pour l'écoulement manipulé ($\gamma = \gamma_e$).*

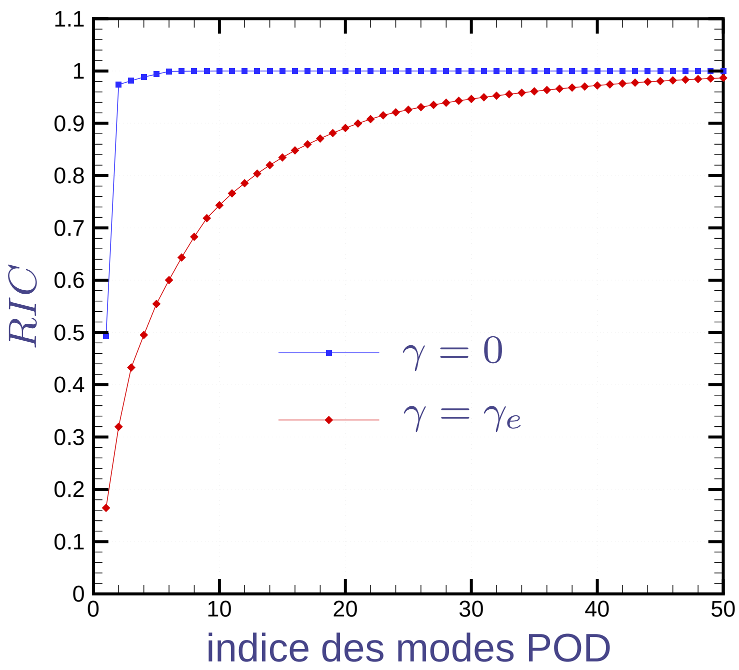


Fig. : *Comparaison du contenu informationnel relatif pour l'écoulement non contrôlé ($\gamma = 0$) et pour l'écoulement manipulé ($\gamma = \gamma_e$).*

- Cylindre non contrôlé, $\gamma = 0$:
  $\hookrightarrow$ 2 *modes sur 100 suffisent pour représenter* 97% *de l'énergie.*
- Cylindre excité, $\gamma = \gamma_e$:
  $\hookrightarrow$ 40 *modes sur 100 sont nécessaires pour représenter* 97% *de l'énergie*
  $\Rightarrow$ *Evolution de la robustesse p.r. aux évolutions dynamiques.*

II - Base POD non réactualisée *Loi de contrôle* sous-optimale

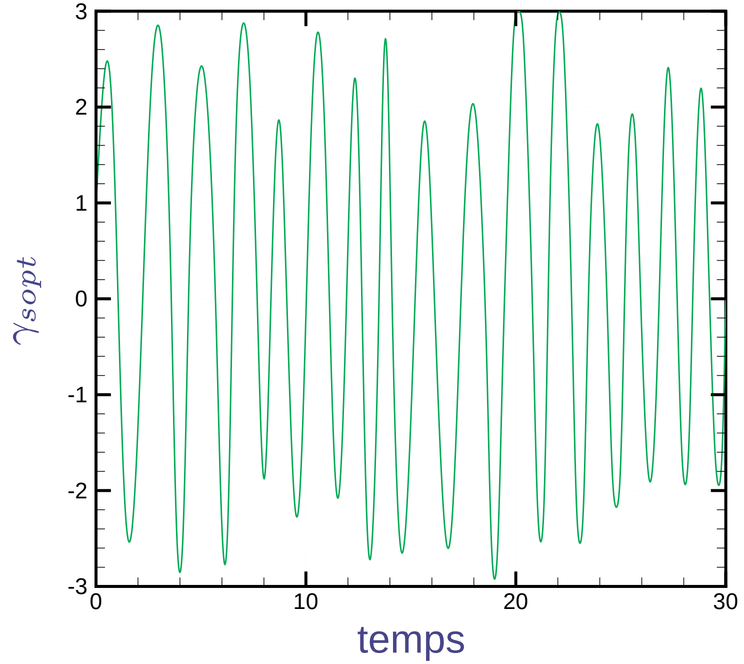


Fig. : *Evolution temporelle de la loi de contrôle* γ_{sopt}.

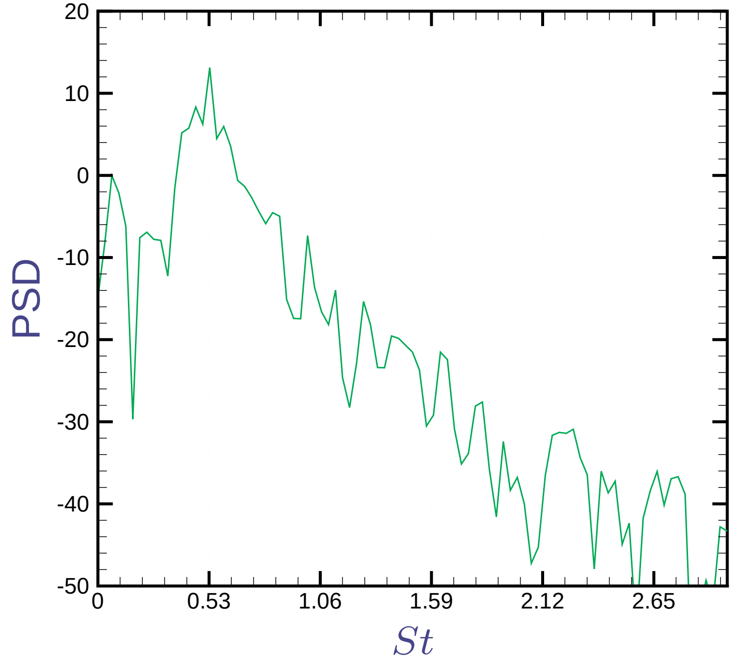


Fig. : *Densité spectrale de puissance de la loi de contrôle* γ_{sopt}.

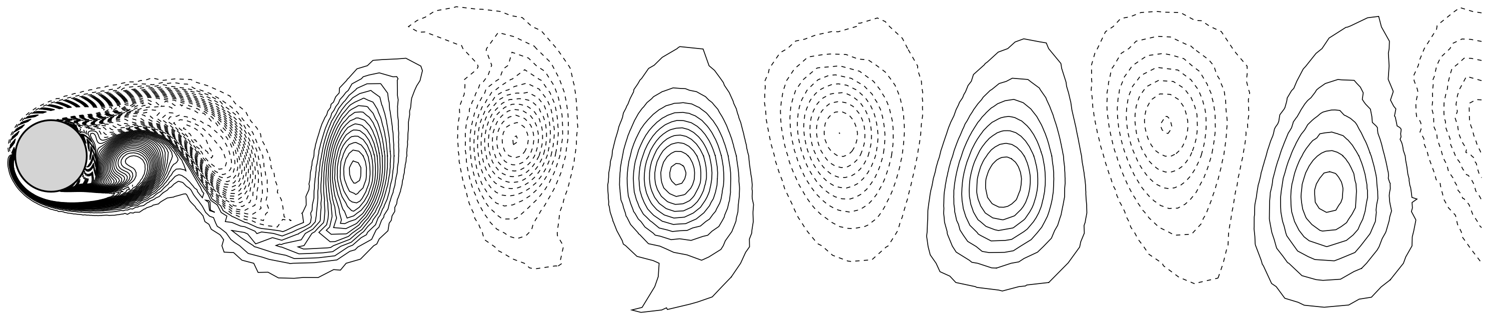
- Diminution très importante de l'instationnarité du sillage.

$$\mathcal{J}(\gamma_e) = 11,85 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{J}(\gamma_{sopt}) = 3,70.$$

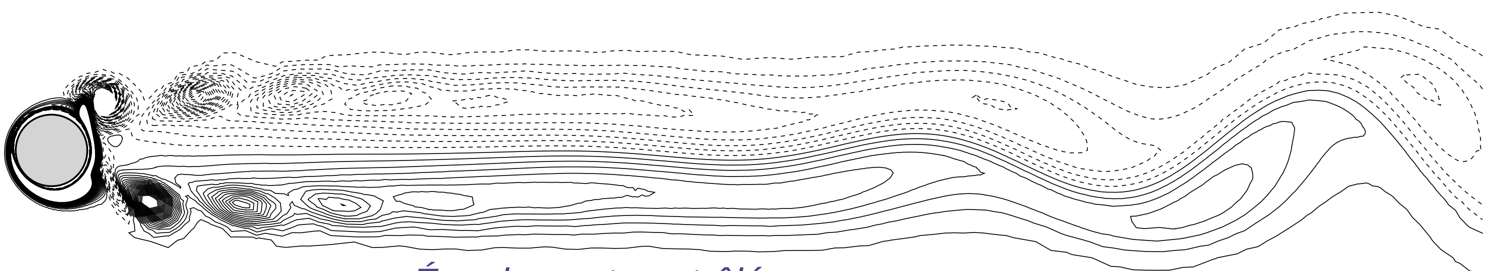
$$\gamma_{sopt} \simeq A \sin(2\pi St_f\, t) \text{ avec } A = 2,2 \text{ et } St_f = 0,53$$

- Le contrôle est optimal pour le système POD ROM.
- Le contrôle est-il optimal pour Navier-Stokes ?

- Aucune preuve mathématique d'optimalité pour Navier-Stokes.



Écoulement non contrôlé, $\gamma = 0$.



Écoulement contrôlé, $\gamma = \gamma_{sopt}$.

Fig. : *Isocontours de vorticité ω_z.*

- Écoulement non contrôlé : $\gamma = 0 \Rightarrow$ Sillage asymétrique.
  $\hookrightarrow$ Grosses structures porteuses d'énergie.
- Écoulement contrôlé : $\gamma = \gamma_{sopt} \Rightarrow$ Sillage quasi symétrique.
  $\hookrightarrow$ Plus petites structures $\Rightarrow$ moins énergétiques.

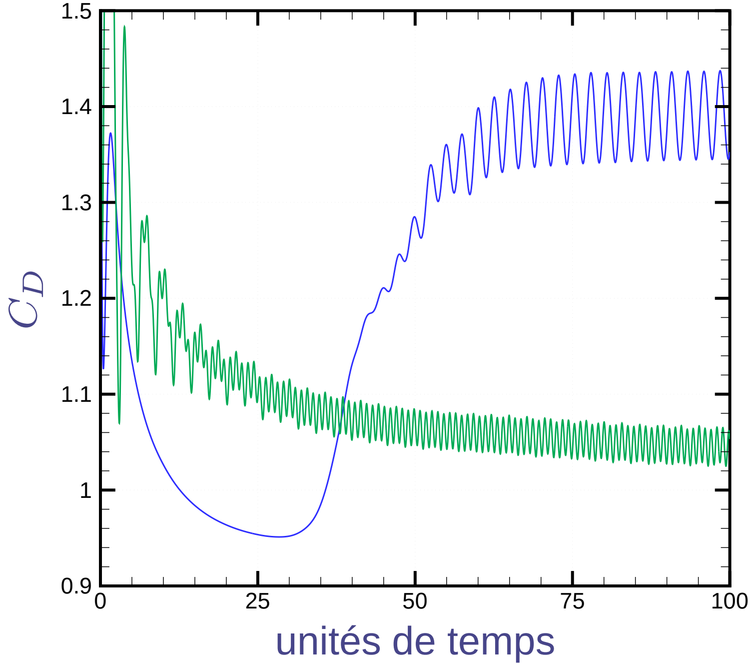


Fig. : *Comparaison de l'évolution temporelle des coefficients de traînée dans le cas non contrôlé et dans le cas où le contrôle* sous-optimal *est appliqué.*

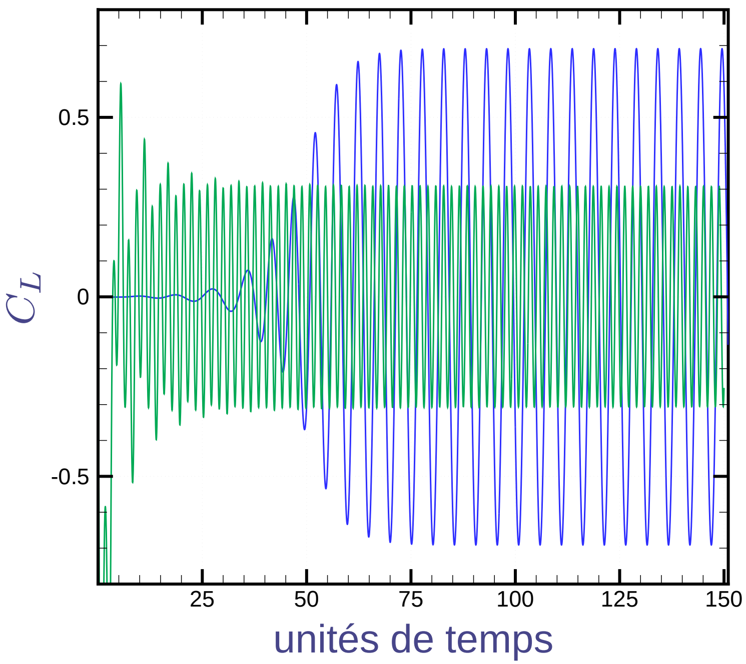


Fig. : *Comparaison de l'évolution temporelle des coefficients de portance dans le cas non contrôlé et dans le cas où le contrôle* sous-optimal *est appliqué.*

- Importante réduction de traînée :

  $C_D = 1,40$ pour $\gamma = 0$ et $C_D = 1,06$ pour $\gamma = \gamma_{sopt}$ (plus de 25%).

- Diminution de l'amplitude de la portance :

  $C_L = 0,68$ pour $\gamma = 0$ et $C_L = 0,13$ pour $\gamma = \gamma_{sopt}$.

II - Base POD non réactualisée *Coûts de calcul*

▶ Contrôle optimal Navier-Stokes par He *et al.* (2000) :

$\hookrightarrow$ loi de contrôle harmonique avec $A = 3$ et $St_f = 0,75$.
$\Rightarrow 30\%$ de réduction de traînée.

▶ Contrôle *sous-optimal* POD ROM (présente étude) :

$\hookrightarrow$ loi de contrôle harmonique avec $A = 2,2$ et $St_f = 0,53$.
$\Rightarrow 25\%$ de réduction de traînée.

- Coûts énergétiques inférieurs (gain énergétique supérieur ?)

- Temps de calcul :

  100 fois inférieur par POD ROM que par NSE ! (idem équations adjointes et condition d'optimalité)

- Stockage mémoire :

  600 fois moins de variables par POD ROM que par NSE !

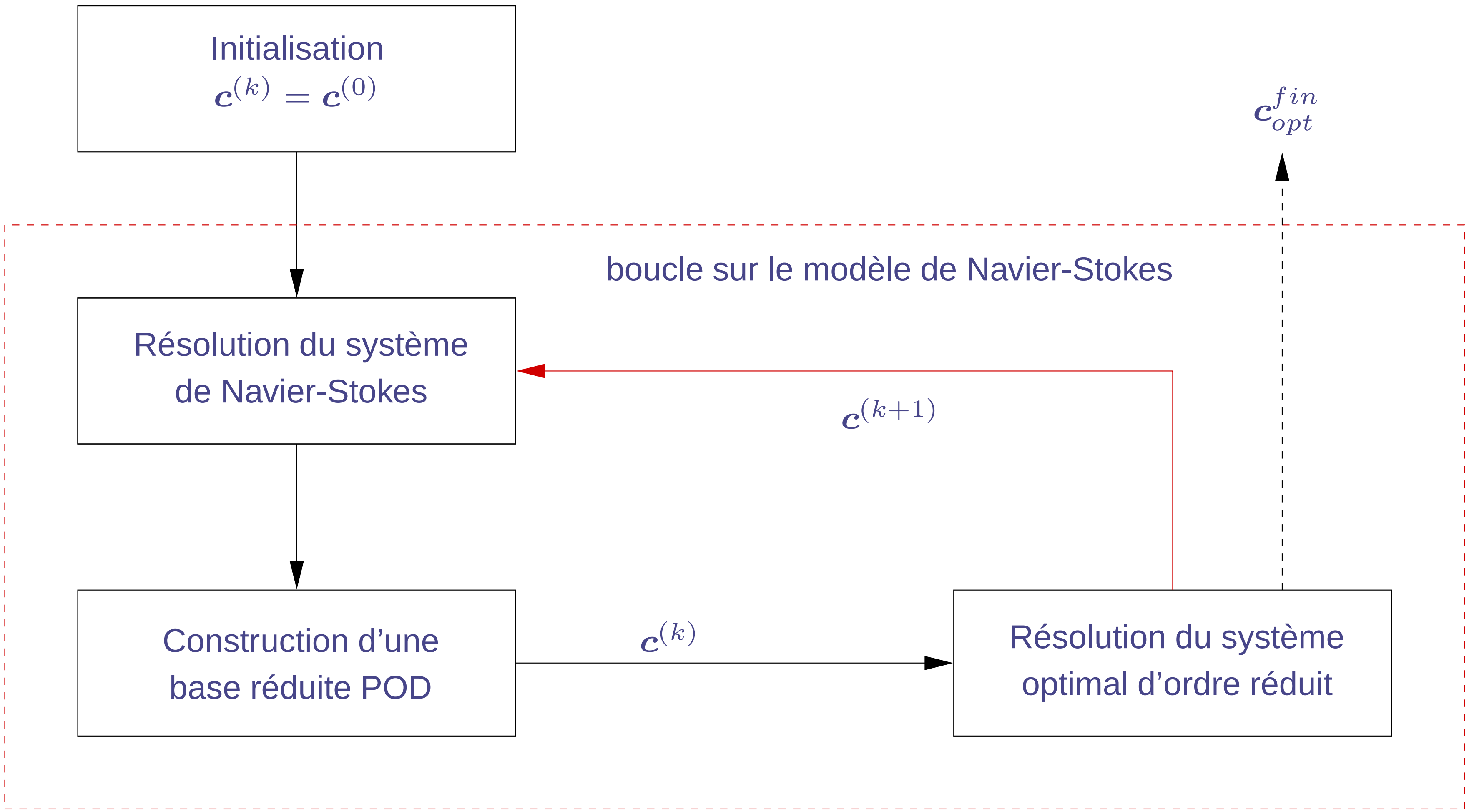
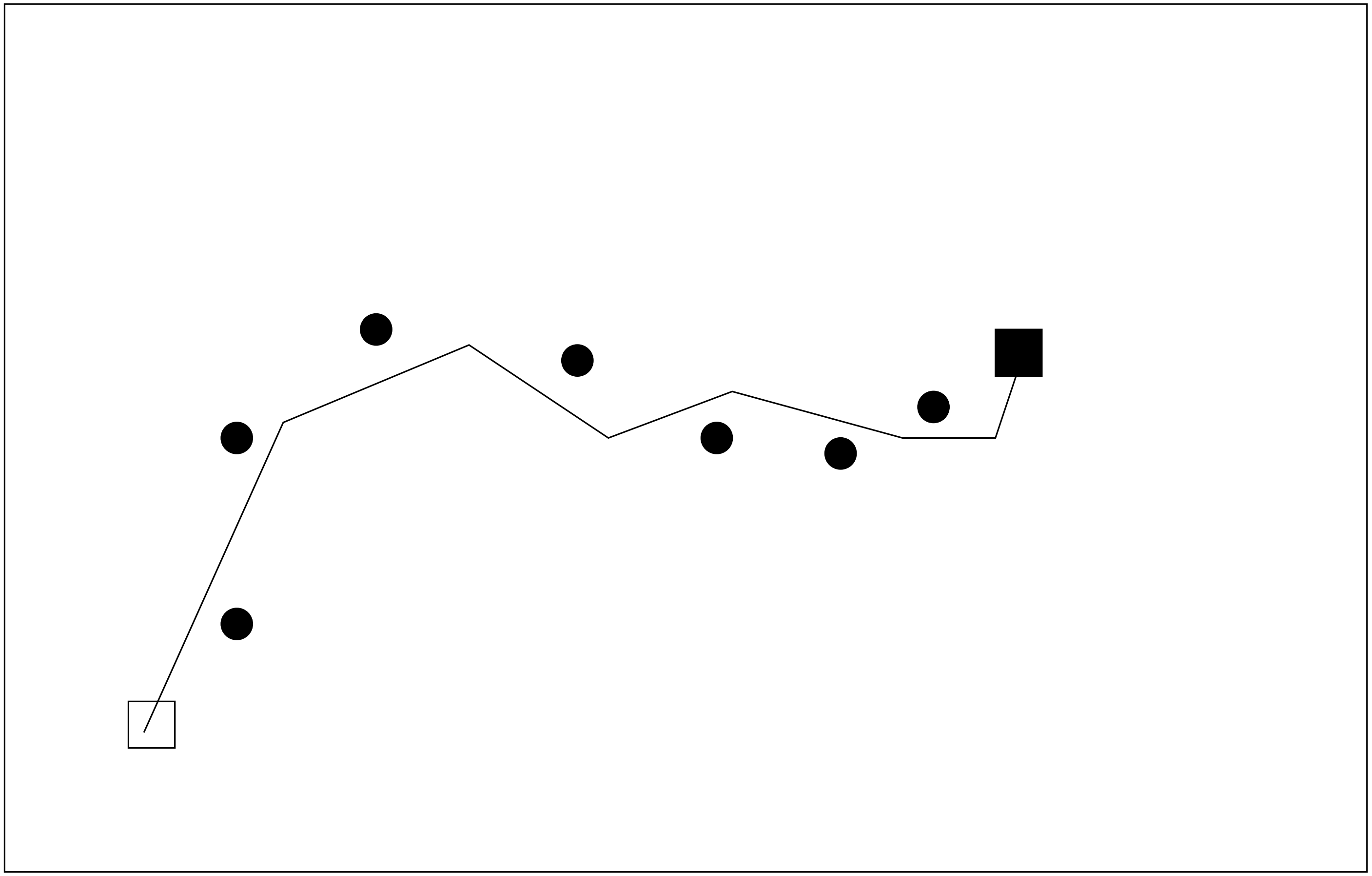


Fig. : *Représentation schématique de la méthode d'optimisation avec réactualisation de la base POD.*

Quand avoir recours au modèle de Navier-Stokes ?



Echantillonnage idéal.

Fig. : *Problème d'optimisation posé dans l'espace des paramètres de contrôle.*
—— *chemin d'optimisation, conditions initiale □ et terminale ■ du processus d'optimisation,*
● *réalisation utilisée pour la base de données.*

Quand avoir recours au modèle de Navier-Stokes ?

▶ Nécessité de directions non prises en compte dans la base POD initiale $\{\mathbf{\Phi}_i\}_{i=1,\dots,N_{gal}}$

▶ Construction de N_{neq} modes particuliers

- Vecteur translation entre le champ moyen I et le champ moyen II :

$$\mathbf{\Phi}_0^{I\rightarrow II} = \mathbf{\Phi}_0^{II} - \mathbf{\Phi}_0^{I}.$$

- Ajout à la base existante (Gram-Schmidt)

$$\mathbf{\Phi}_{N_{gal}+1}^{I} \equiv \widetilde{\mathbf{\Phi}}_0^{I\rightarrow II}.$$

- Idem pour $\mathbf{\Phi}_0^{I\rightarrow III}$, etc...

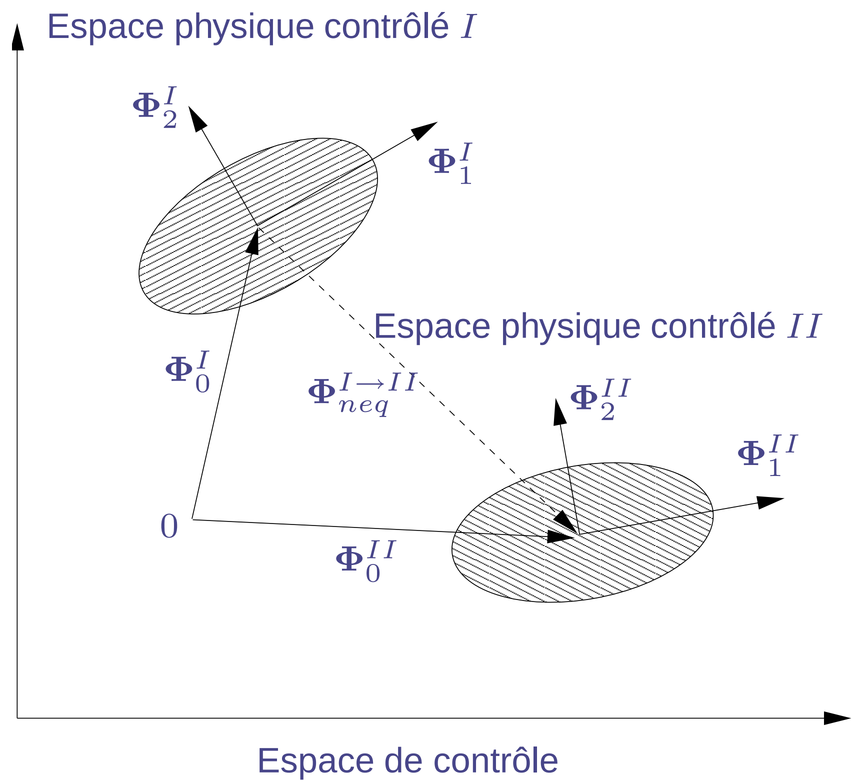


Fig. : *Représentation schématique d'une transition de dynamique par utilisation d'un mode moyen de non-équilibre.*

Noack, B.R., Afanasiev, K., Morzyński, M., Tadmor, G. et Thiele, F. (2003) : A hierarchy of low-dimensional models for the transient and post-transient cylinder wake. *J. Fluid Mech.*, **497** pp. 335–363.

- Décomposition de la vitesse sur $N_{gal}+N_{neq}+1$ modes :

$$\widetilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x},\,t) = \underbrace{a_0(t)\,\boldsymbol{\Phi}_0(\boldsymbol{x})}_{\text{champ moyen}} + \gamma(\boldsymbol{c},\,t)\,\boldsymbol{u}_c(\boldsymbol{x}) + \underbrace{\sum_{i=1}^{N_{gal}} a_i(t)\,\boldsymbol{\Phi}_i(\boldsymbol{x})}_{\text{modes POD Galerkin}} + \underbrace{\sum_{i=N_{gal}+1}^{N_{gal}+N_{neq}} a_i(t)\,\boldsymbol{\Phi}_i(\boldsymbol{x})}_{\text{modes de non-équilibre}}\,.$$

- Système dynamique avec $N_{gal}+N_{neq}+1$ modes retenus (équations d'état) :

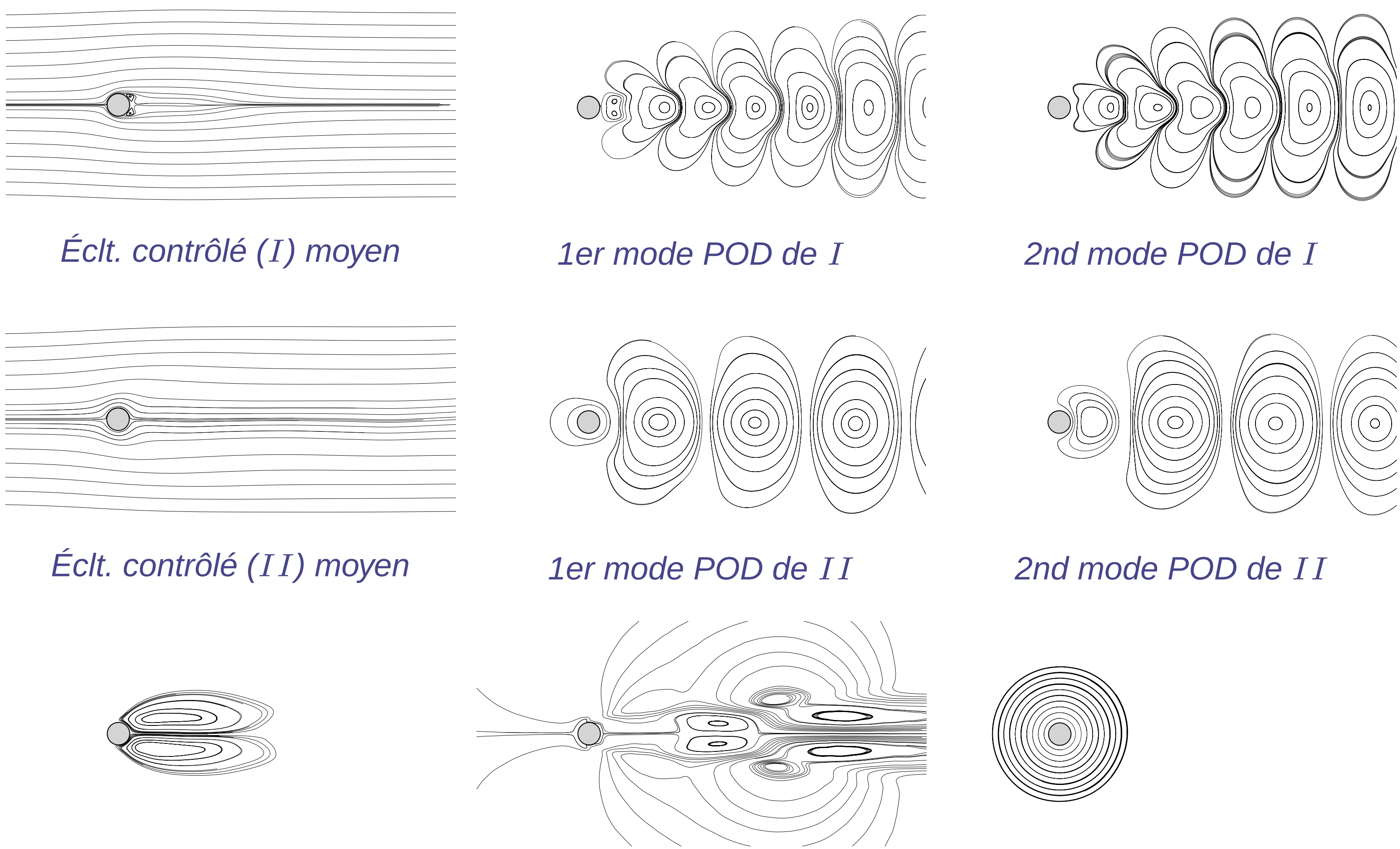
$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\,a_i(t)}{d\,t} &= \sum_{j=0}^{N_{gal}+N_{neq}} \mathcal{B}_{ij}\,a_j(t) + \sum_{j=0}^{N_{gal}+N_{neq}} \sum_{k=0}^{N_{gal}+N_{neq}} \mathcal{C}_{ijk}\,a_j(t)a_k(t) \\ &\quad + \mathcal{D}_i\,\frac{d\,\gamma(\boldsymbol{c},\,t)}{d\,t} + \left(\mathcal{E}_i + \sum_{j=0}^{N_{gal}+N_{neq}} \mathcal{F}_{ij}\,a_j(t)\right)\gamma(\boldsymbol{c},\,t) + \mathcal{G}_i\gamma^2(\boldsymbol{c},\,t). \\ a_i(0) &= (\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\,0),\,\boldsymbol{\Phi}_i(\boldsymbol{x})). \end{aligned}\right.$$

$\mathcal{B}_{ij}$, $\mathcal{C}_{ijk}$, $\mathcal{D}_i$, $\mathcal{E}_i$, $\mathcal{F}_{ij}$ et $\mathcal{G}_i$ dépendent de $\boldsymbol{\Phi}$, $\boldsymbol{u}_c$ et Re.

Aspects physiques	Modes	Aspects dynamiques
fonction de contrôle	$\boldsymbol{u}_c$	dynamique pré-déterminée
mode écoulement moyen	$\boldsymbol{u}_m,\ i = 0$	$a_0 = Cste$
modes POD Galerkin correspondent à la physique de l'écoulement	$i = 1$	**Système dynamique** modes déterminés par intégration du système dynamique (le mode $i = 0$ peut également être résolu et $a_0 \equiv a_0(t)$)
	$i = 2$	
	$\cdots$	
	$i = N_{gal}$	
modes de non-équilibre correspondent à des directions privilégiées	$i = N_{gal} + 1$	
	$\cdots$	
	$i = N_{gal} + N_{neq}$	

Tab. : *Descriptif des aspects physiques et dynamiques des modes présents dans la décomposition sur la base POD, augmentée des modes de non-équilibre.*

III - Base POD réactualisée *Modes POD Galerkin et modes de non-équilibre*



Éclt. contrôlé (I) moyen — *1er mode POD de I* — *2nd mode POD de I*

Éclt. contrôlé (II) moyen — *1er mode POD de II* — *2nd mode POD de II*

Mode shift de I vers II — *Mode shift de I vers base* — *Fonction de contrôle*

Fig. : *Représentation de modes Galerkin, de la fonction de contrôle $\boldsymbol{u}_c$, et de modes de non-équilibre présents dans la base POD*

- Opérateur *de traînée*

$$\mathcal{C}_{\mathcal{D}} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$$
$$\boldsymbol{u} \mapsto 2\int_{\Gamma_c} \left(u_3 n_x - \frac{1}{Re}\frac{\partial u_1}{\partial x} n_x - \frac{1}{Re}\frac{\partial u_1}{\partial y} n_y \right) d\Gamma.$$

- En variables réduites,

  ↪ Coefficient de traînée réel Navier-Stokes $C_D = \mathcal{C}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{U})$ avec $\boldsymbol{U} = (u,\, v,\, p)^T$

  ↪ Coefficient de traînée modélisé par POD $\widetilde{C}_D = \mathcal{C}_{\mathcal{D}}(\widetilde{\boldsymbol{U}})$ avec $\widetilde{\boldsymbol{U}} = (\widetilde{u},\, \widetilde{v},\, \widetilde{p})^T$

- Problème : $\widetilde{p}$ n'est pas connu

↪ La base POD est étendue au champ de pression : $\boldsymbol{\Phi} = (\boldsymbol{\Phi},\, \Phi^p)^T$

⇒ Corrélations avec pression $C(t,t') = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{\Omega} U_i(\boldsymbol{x},t)U_i(\boldsymbol{x},t')\, d\boldsymbol{x}$

- Décomposition

$$\widetilde{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{x},\,t) = \gamma(\boldsymbol{c},\,t)\,\boldsymbol{U}_c(\boldsymbol{x}) + \underbrace{\sum_{i=0}^{N_{gal}} a_i(t)\,\boldsymbol{\Phi}_i(\boldsymbol{x})}_{\text{modes POD Galerkin}} + \underbrace{\sum_{i=N_{gal}+1}^{N_{gal}+N_{neq}} a_i(t)\,\boldsymbol{\Phi}_i(\boldsymbol{x})}_{\text{modes de non-équilibre}}.$$

- Evolution du coefficient de traînée modélisé par POD

$$\widetilde{C}_D(\boldsymbol{a}) = \sum_{i=0}^{N_{gal}} a_i(t) N_i + \sum_{i=N_{gal}+1}^{N_{gal}+N_{neq}} a_i(t) N_i \quad \text{avec} \quad N_i = \mathcal{C}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\Phi}_i).$$

- Fonction objectif modélisée par POD (coefficient de traînée moyen)

$$\widetilde{\mathcal{J}}(\boldsymbol{a}) = \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{i=0}^{N_{gal}+N_{neq}} a_i(t) N_i \, dt.$$

- Système dynamique adjoint :

$$\begin{cases} \dfrac{d\,\xi_i(t)}{dt} = -\displaystyle\sum_{j=0}^{N_{gal}+N_{neq}} \left(\mathcal{B}_{ji} + \gamma(\boldsymbol{c},\, t)\, \mathcal{F}_{ji} + \sum_{k=0}^{N_{gal}+N_{neq}} \left(\mathcal{C}_{jik} + \mathcal{C}_{jki} \right) a_k(t) \right) \xi_j(t) - \dfrac{1}{T} N_i, \\ \\ \xi_i(T) = 0. \end{cases}$$

- Conditions d'optimalité

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{c}} \mathcal{L} = \int_0^T \left(\sum_{i=0}^{N_{gal}+N_{neq}} \mathcal{L}_i \right) \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{c}}\, \gamma\, dt.$$

avec $\mathcal{L}_i = -\dfrac{d\xi_i}{dt} \mathcal{D}_i + \xi_i \left(\mathcal{E}_i + \displaystyle\sum_{j=0}^{N_{gal}+N_{neq}} \mathcal{F}_{ij} a_j + 2\gamma(\boldsymbol{c},\, t) \mathcal{G}_i \right)$

III - Base POD réactualisée *Formulation contrôle optimal POD ROM*

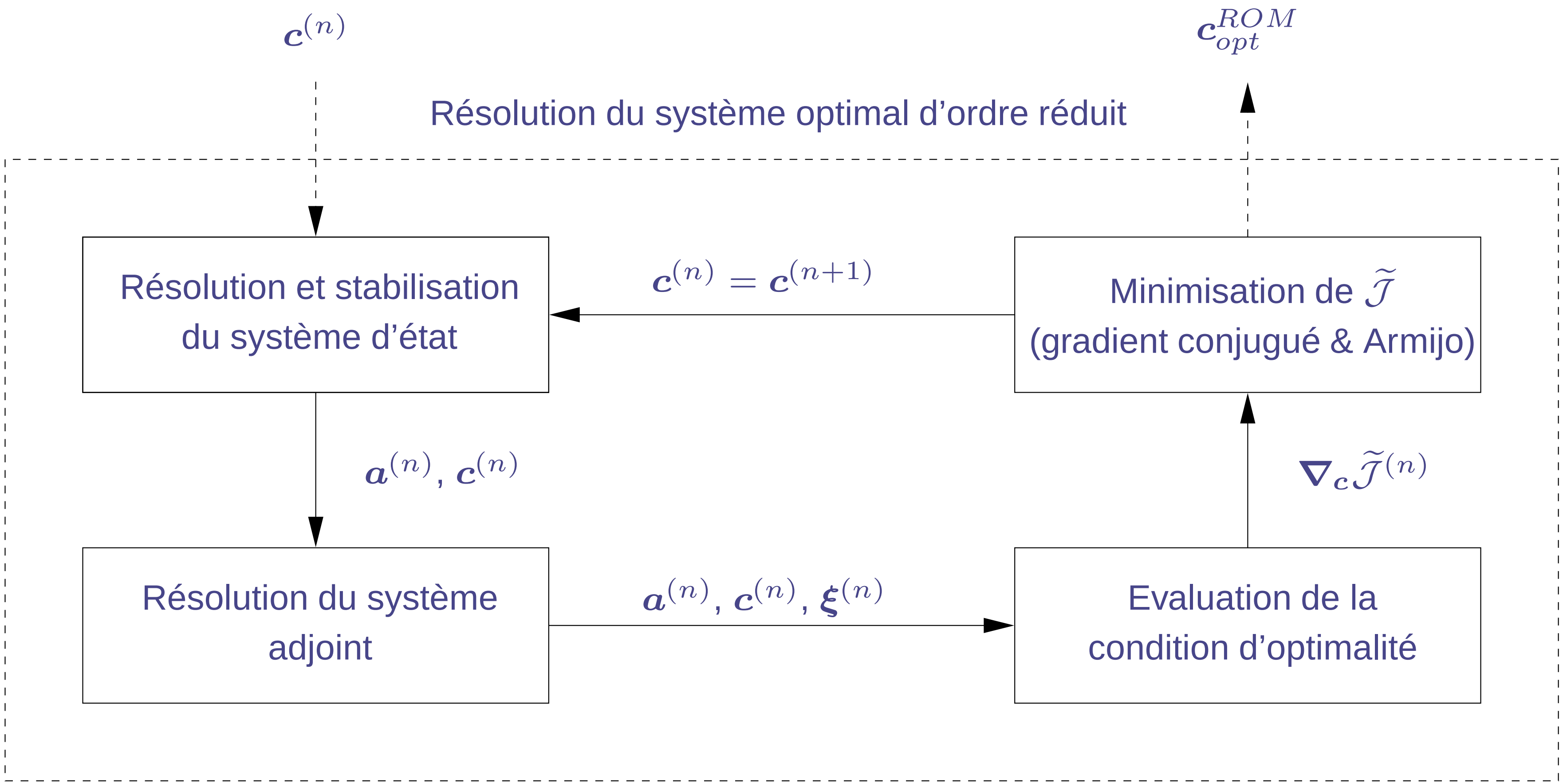
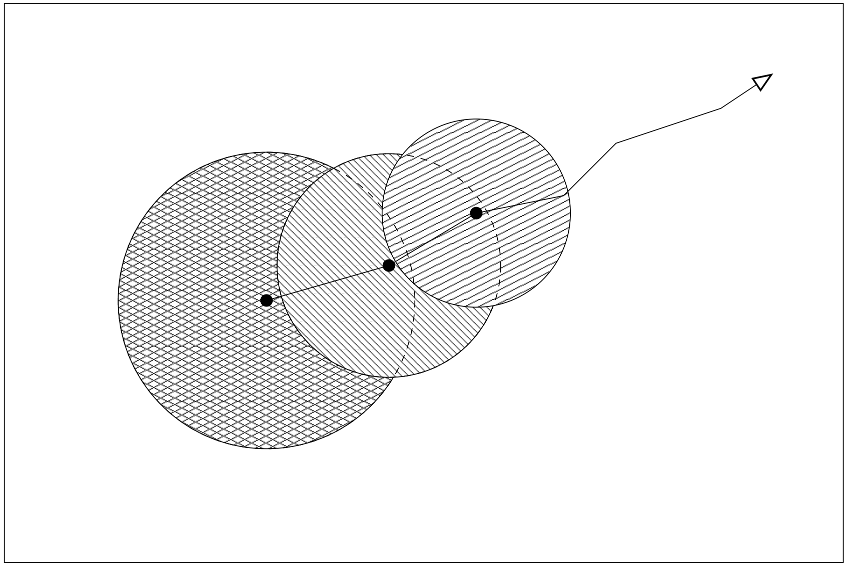


Fig. : *Représentation schématique du processus de résolution du système optimal d'ordre réduit.*

Quand avoir recours au modèle de Navier-Stokes pour "rafraîchir" la base POD ?

$\longrightarrow$ Déterminer un domaine de validité du modèle réduit

- Domaine "infini" (pas de contraintes)
- Détermination empirique : méthode adaptative
- Détermination automatique : méthode à région de confiance (TRPOD)



Avantages TRPOD

- Pas d'empirisme
- Preuves de convergence de la solution sous certaines conditions
- Coûts de calcul identiques à méthode adaptative

Conn, A.R., Gould, N.I.M. et Toint, P.L. (2000) : Trust-region methods. *SIAM, Philadelphia.*

Initialisation : $\boldsymbol{c}_0$, résolution du modèle de Navier-Stokes. $k = 0$.

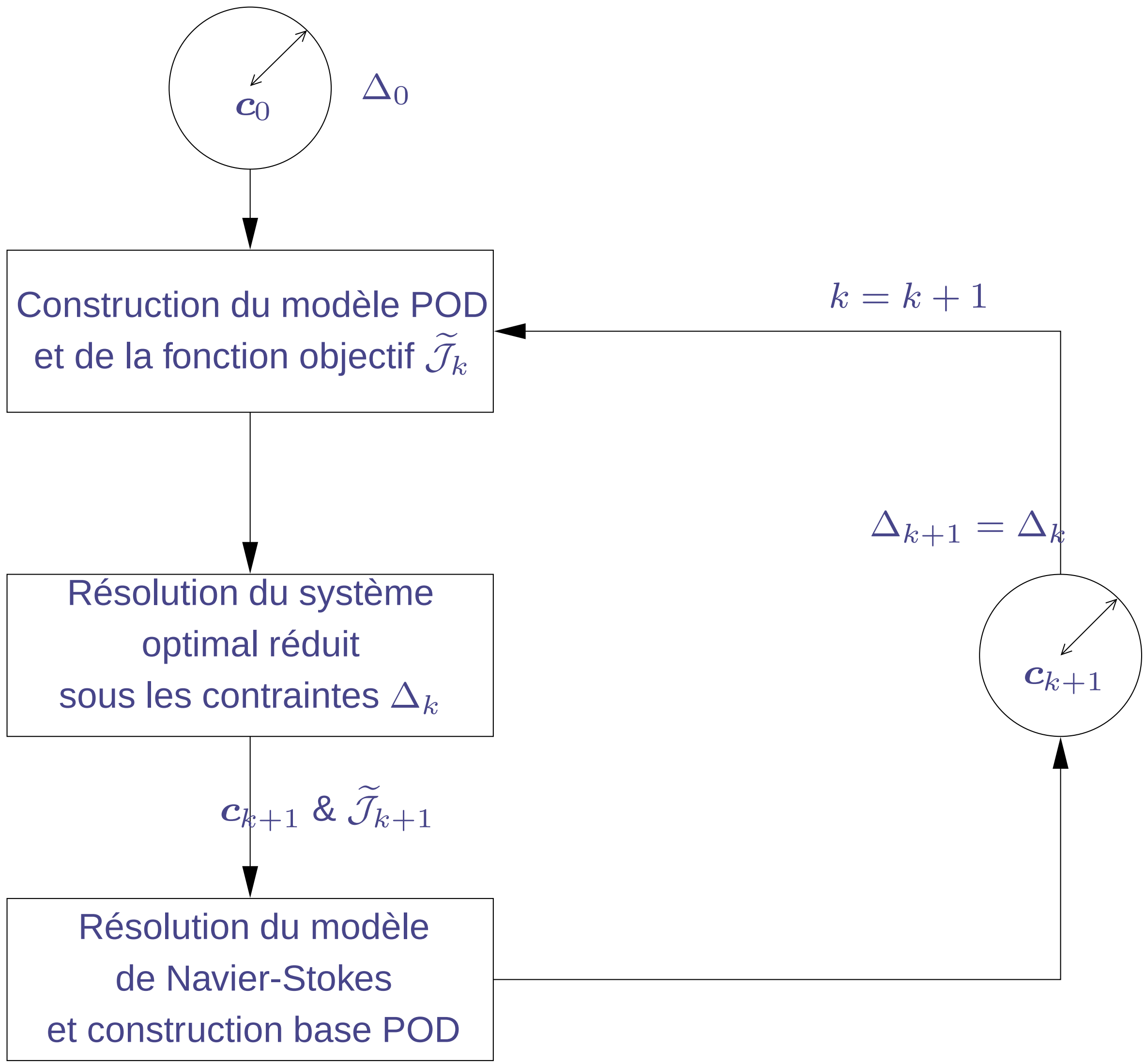
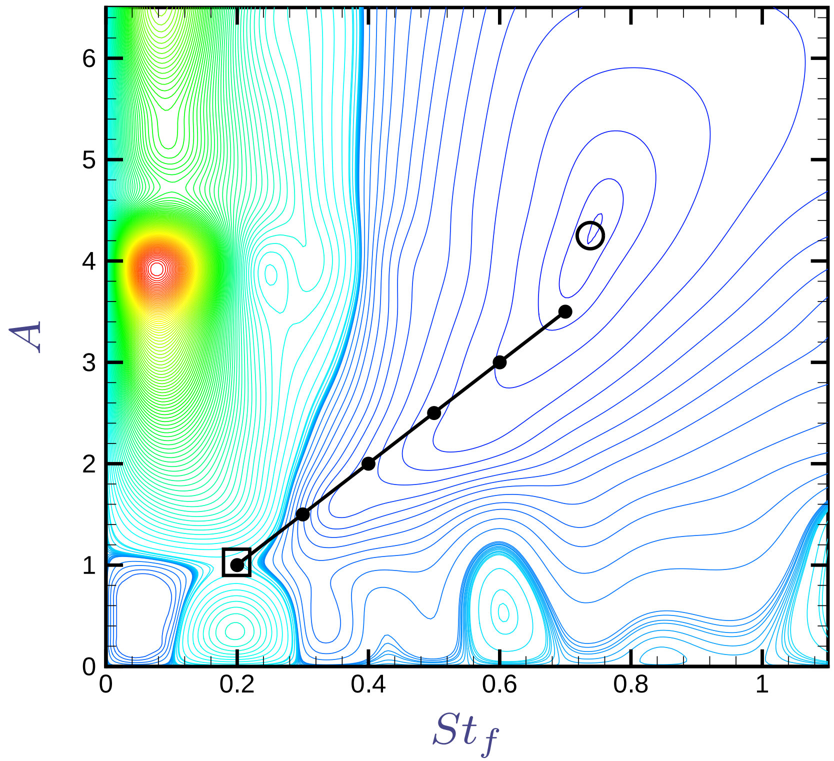
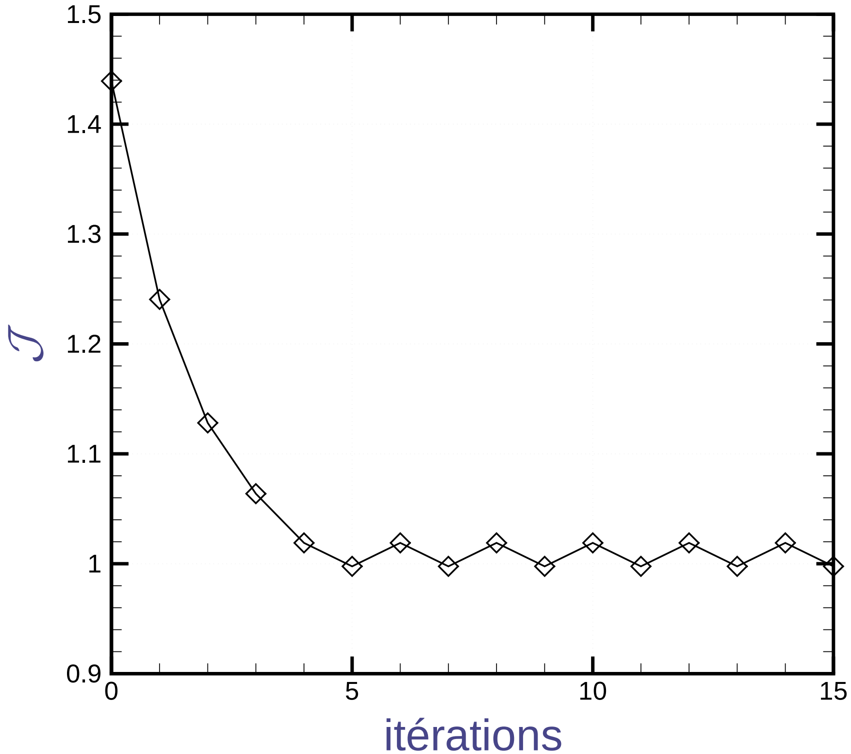


Fig. : *Schématisation de la méthode adaptative.*

Paramètres de contrôle initiaux : $A = 1,0$ et $St_f = 0,2$



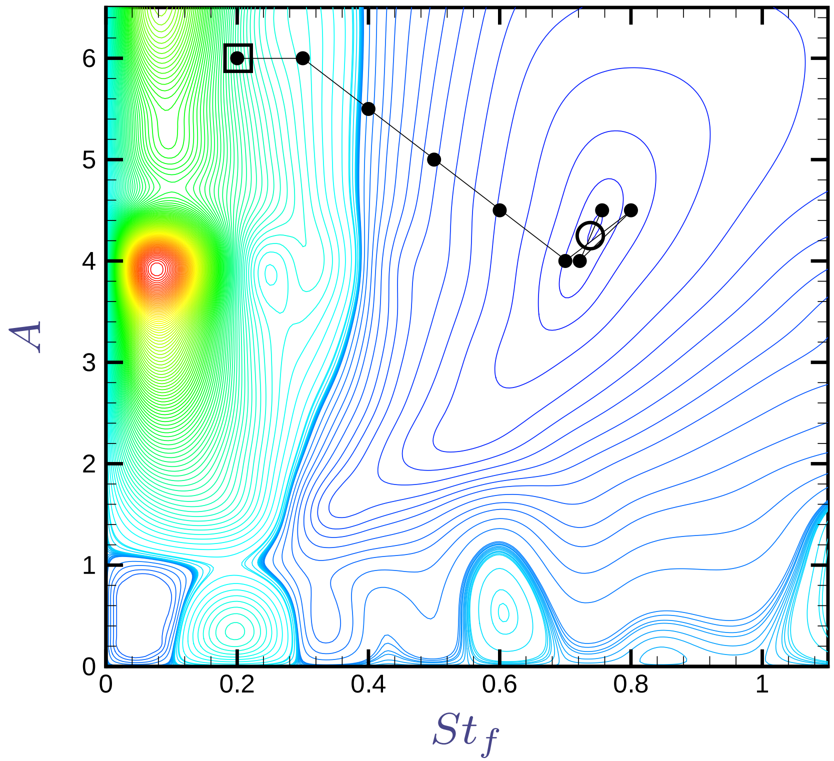


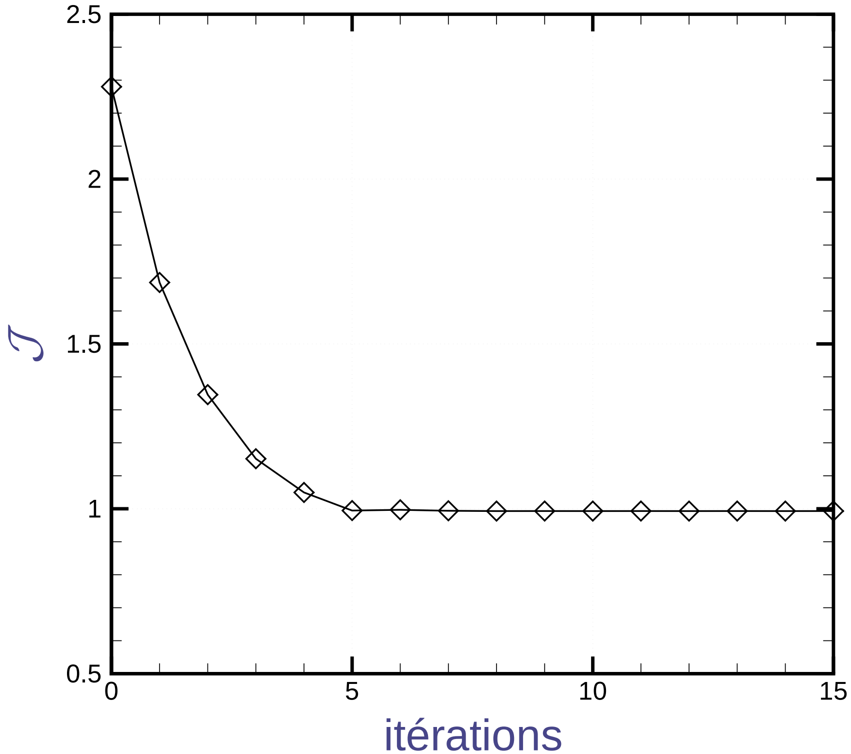
Paramètres de contrôle obtenus : oscillations autour de $A = 3,25$ et $St_f = 0,65$

Coefficient de traînée moyen : $\mathcal{J} = 1,01$

Pas de convergence...

Paramètres de contrôle initiaux : $A = 6,0$ et $St_f = 0,2$



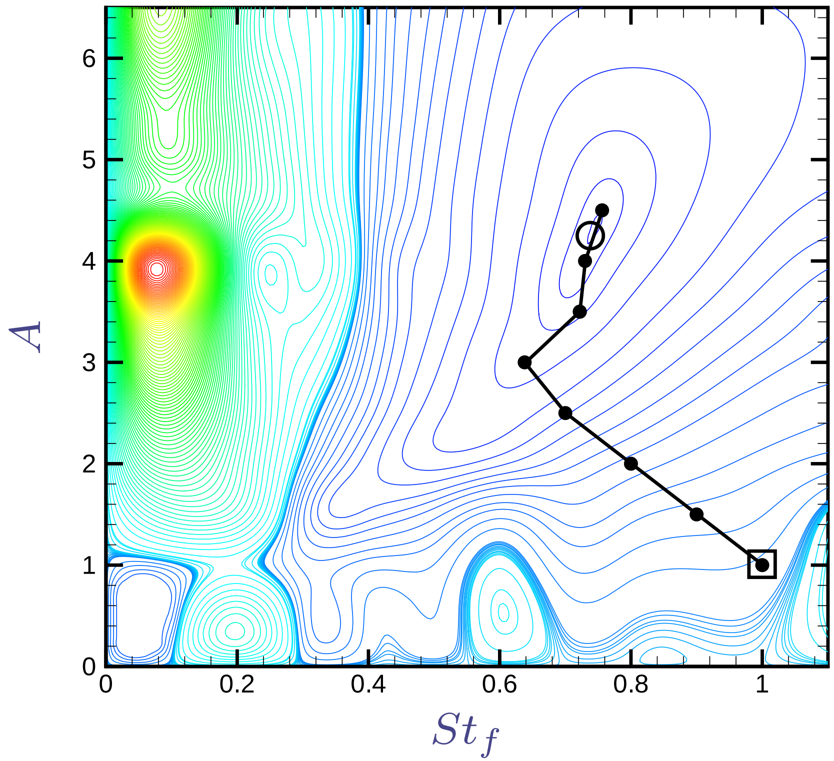


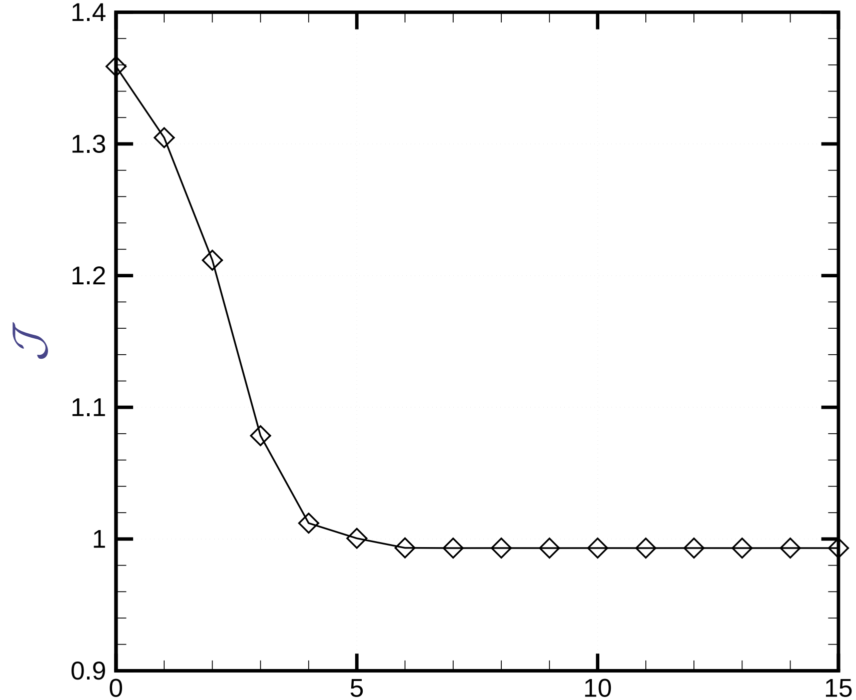
Paramètres de contrôle obtenus : oscillations autour de $A = 4,25$ et $St_f = 0,74$

Coefficient de traînée moyen : $\mathcal{J} = 0,993$

Pas de convergence...

Paramètres de contrôle initiaux : $A = 1,0$ et $St_f = 1,0$





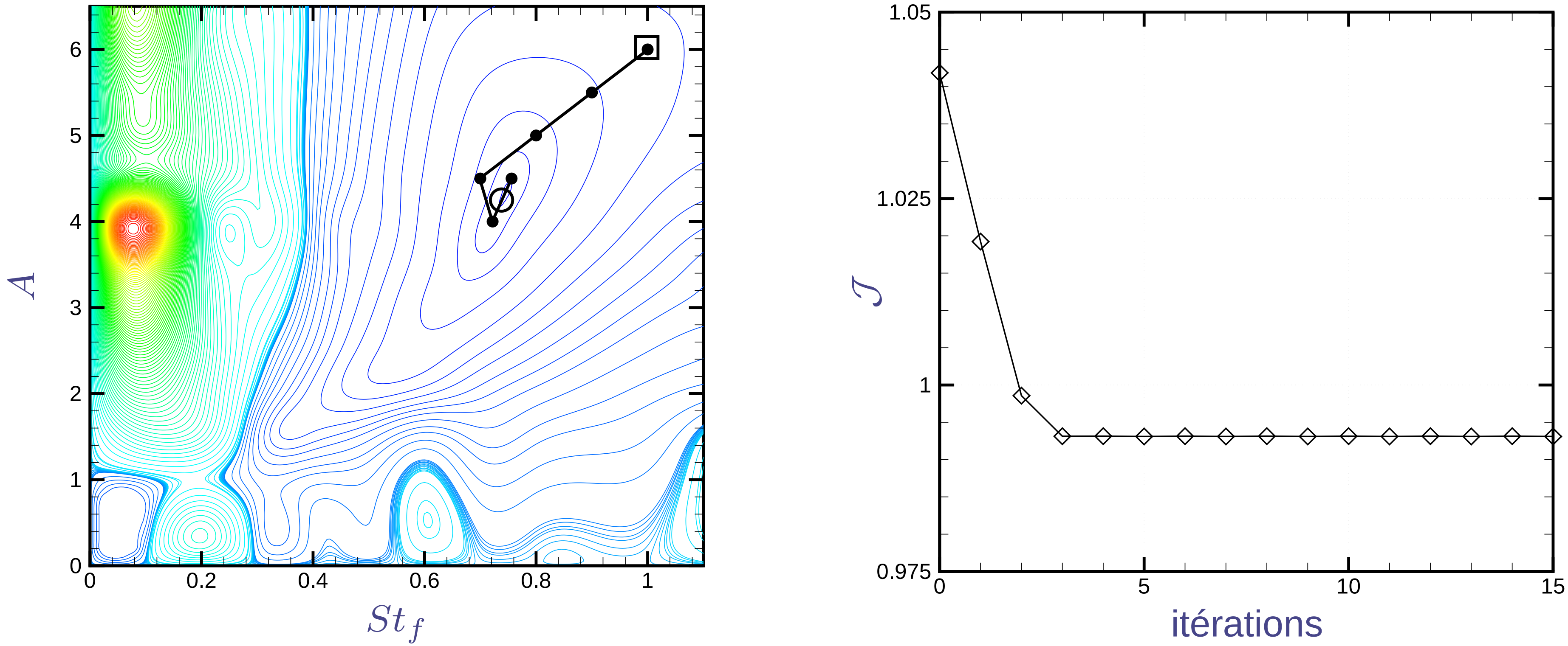
Paramètres de contrôle obtenus : oscillations autour de $A = 4,25$ et $St_f = 0,74$

Coefficient de traînée moyen : $\mathcal{J} = 0,993$

Pas de convergence...

III - Base POD réactualisée *Méthode adaptative*

Paramètres de contrôle initiaux : $A = 6,0$ et $St_f = 1,0$



Paramètres de contrôle obtenus : oscillations autour de $A = 4,25$ et $St_f = 0,74$

Coefficient de traînée moyen : $\mathcal{J} = 0,993$

Pas de convergence...

Initialisation : $\boldsymbol{c}_0$, résolution du modèle de Navier-Stokes, $\mathcal{J}_0$. $k = 0$.

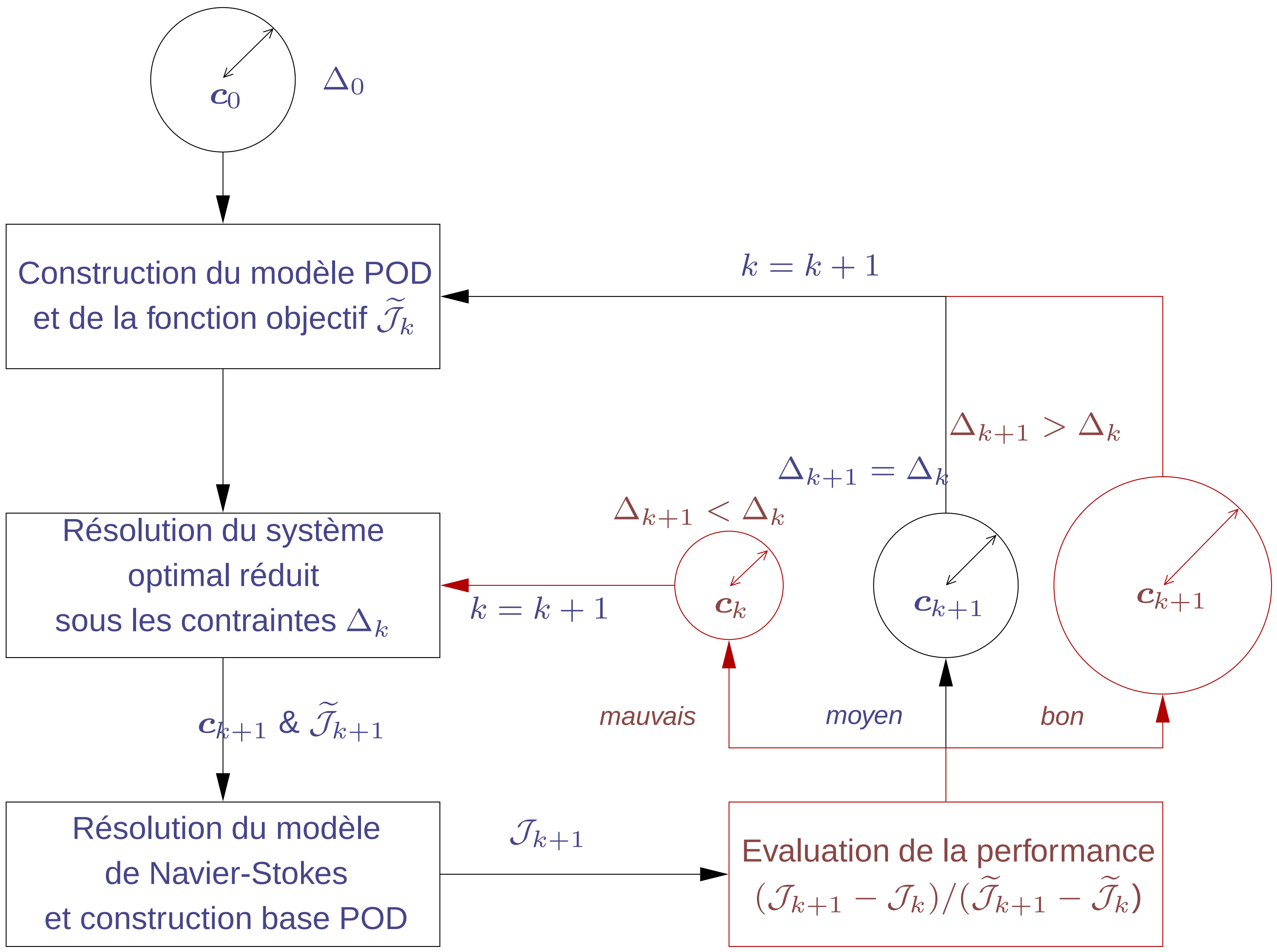
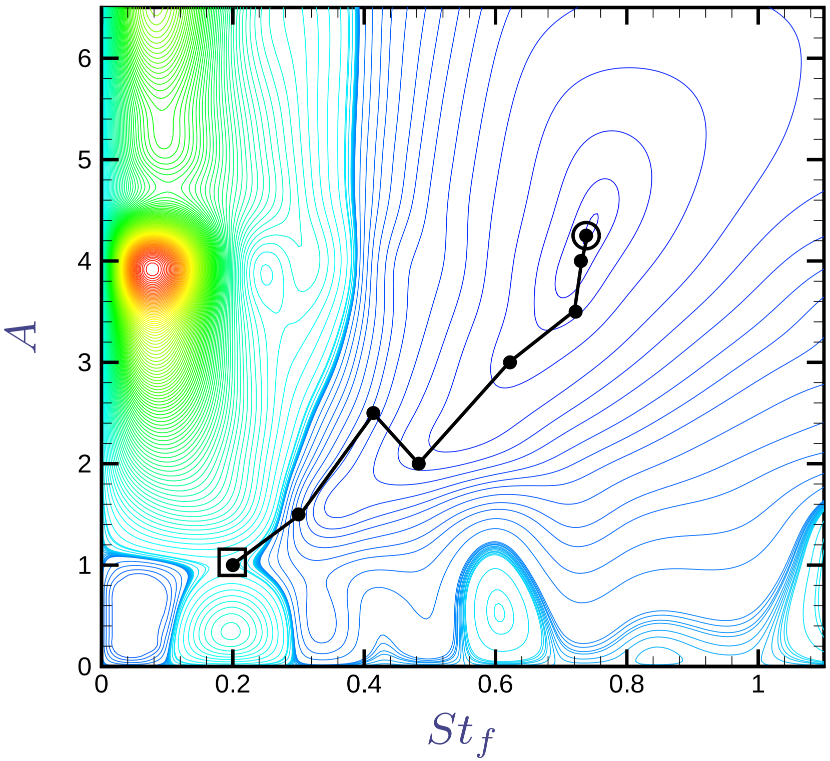
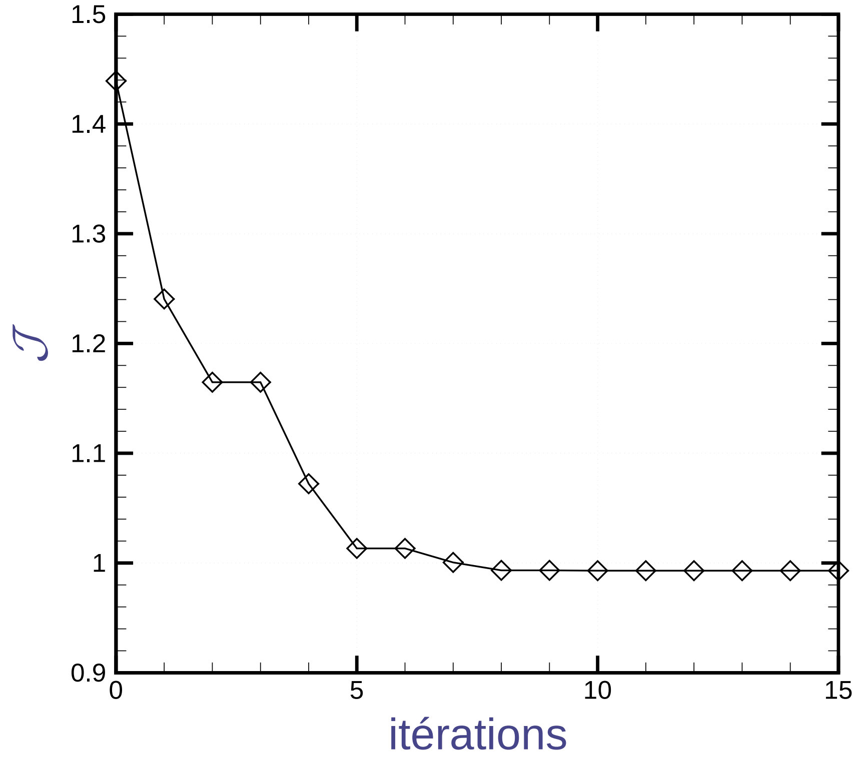


Fig. : *Schématisation de la méthode à région de confiance.*

Paramètres de contrôle initiaux : $A = 1,0$ et $St_f = 0,2$





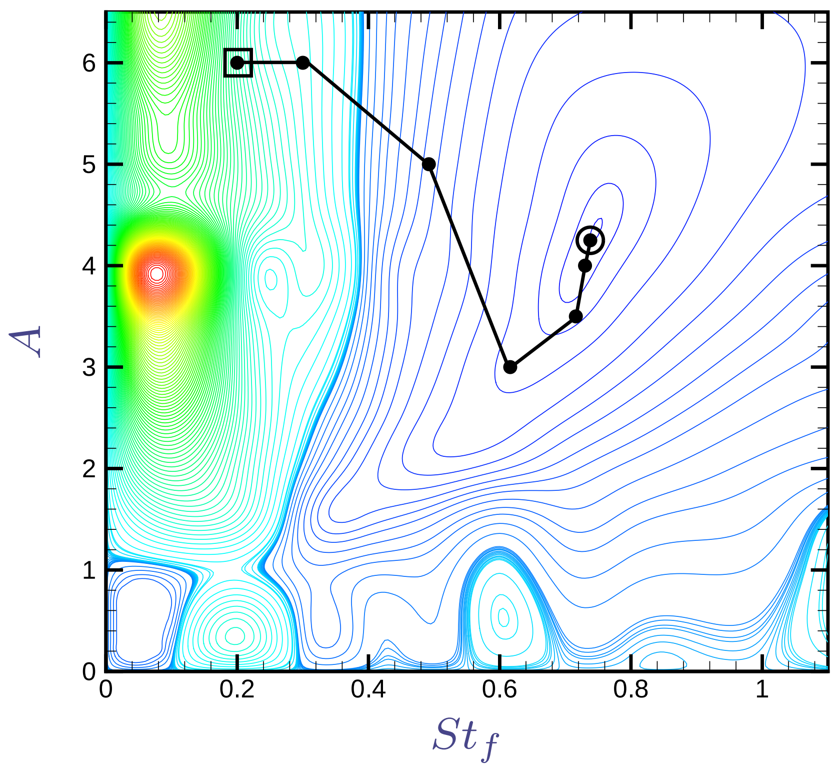
Paramètres de contrôle optimaux : $A = 4,25$ et $St_f = 0,74$

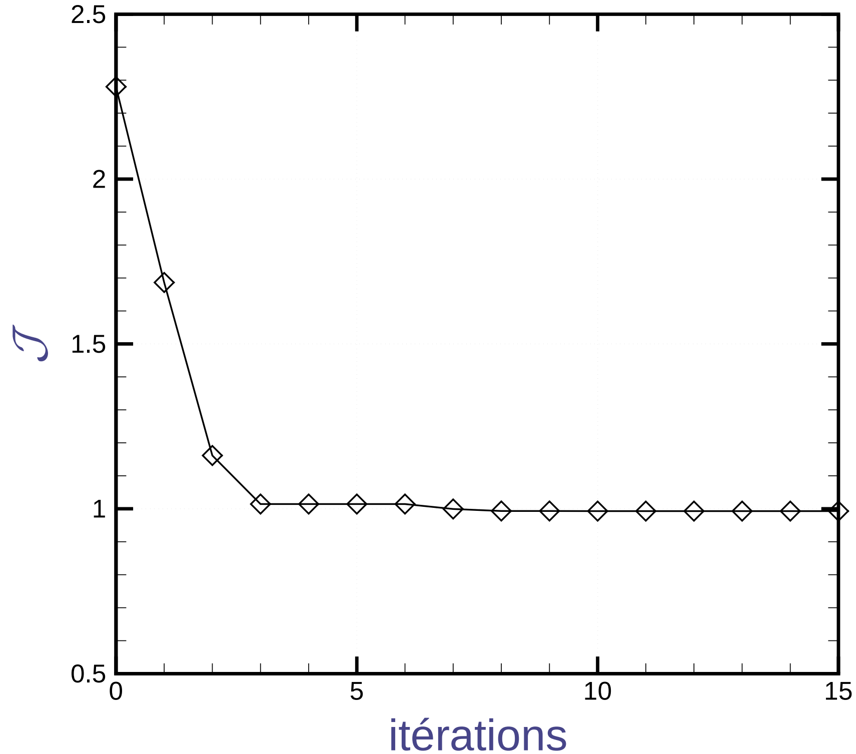
Convergence : coefficient de traînée moyen : $\mathcal{J} = 0,993$,

obtenus en uniquement 8 résolutions de Navier-Stokes

III - Base POD réactualisée *Méthode à région de confiance (TRPOD)*

Paramètres de contrôle initiaux : $A = 6,0$ et $St_f = 0,2$



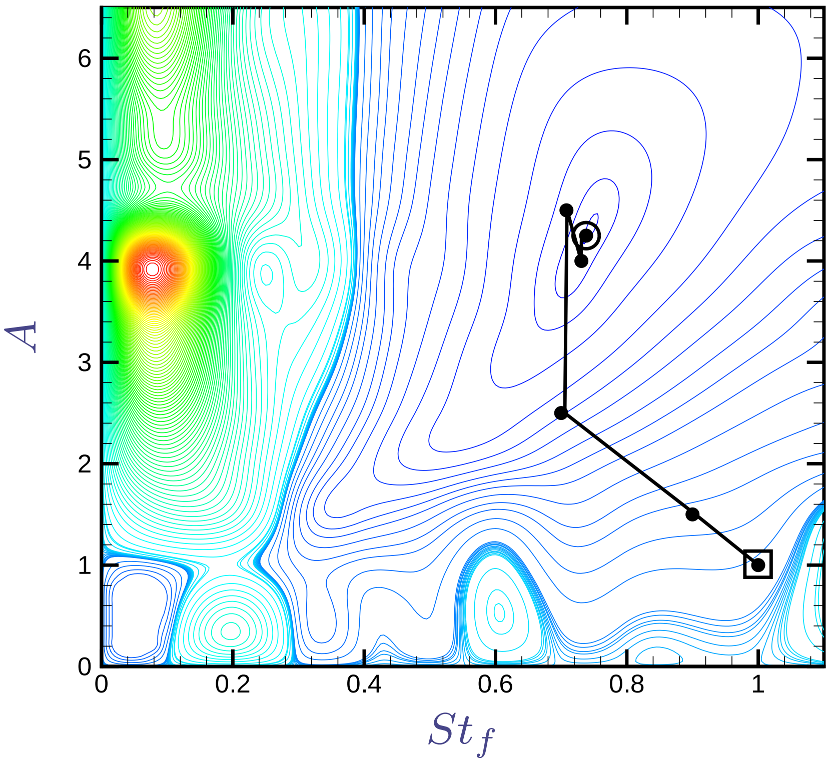


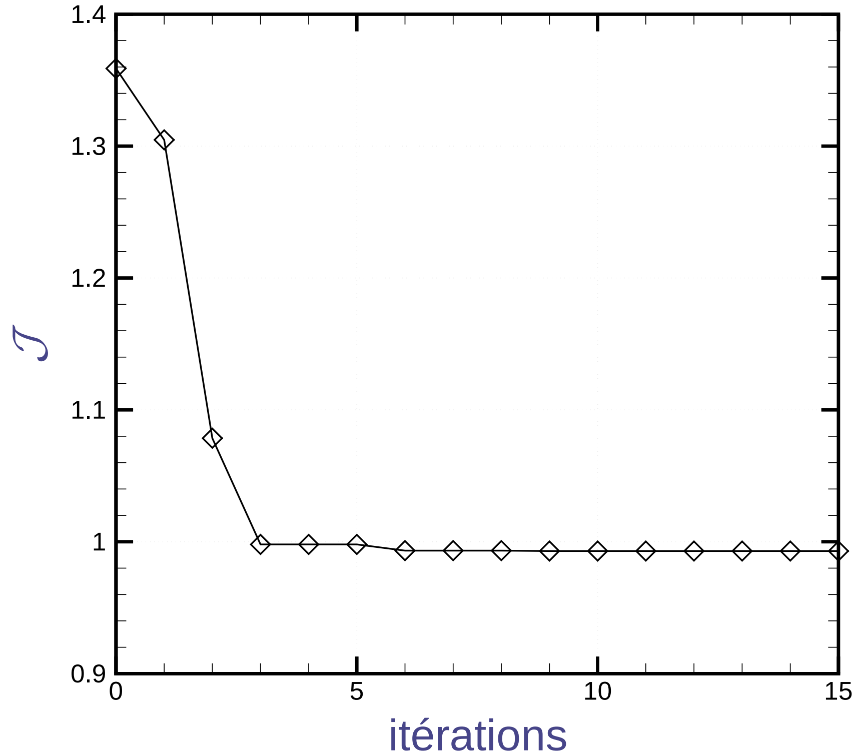
Paramètres de contrôle optimaux : $A = 4,25$ et $St_f = 0,74$

Convergence : coefficient de traînée moyen : $\mathcal{J} = 0,993$,

obtenus en uniquement 6 résolutions de Navier-Stokes

Paramètres de contrôle initiaux : $A = 1,0$ et $St_f = 1,0$



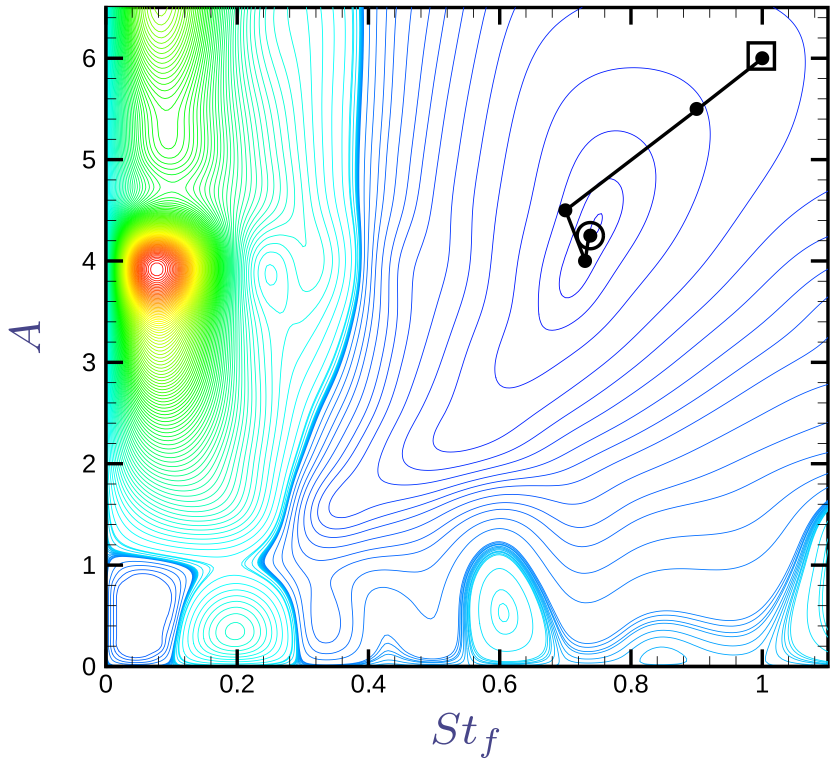


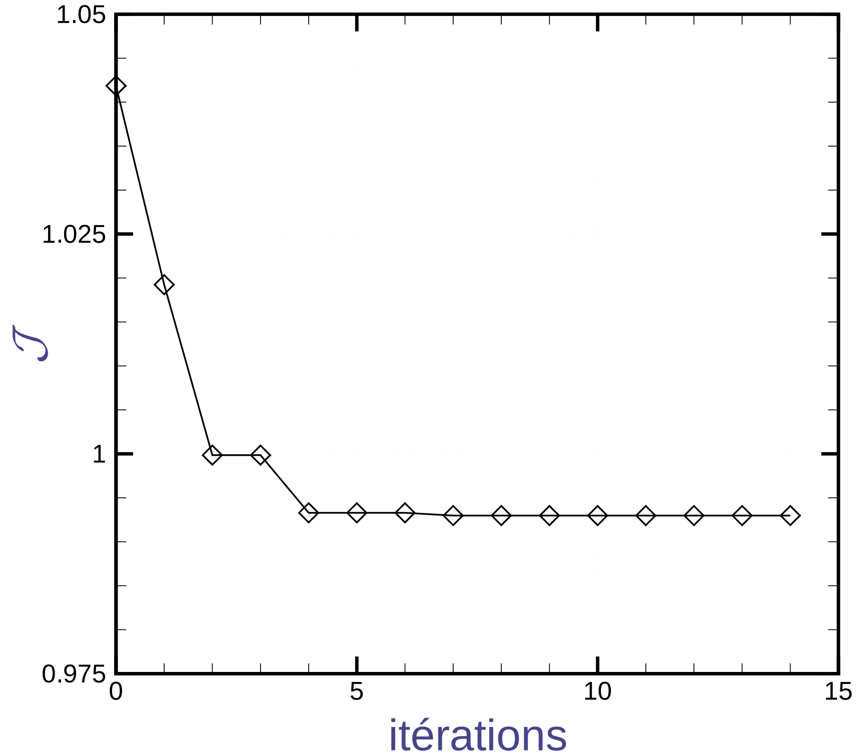
Paramètres de contrôle optimaux : $A = 4,25$ et $St_f = 0,74$

Convergence : coefficient de traînée moyen : $\mathcal{J} = 0,993$,

obtenus en uniquement 5 résolutions de Navier-Stokes

Paramètres de contrôle initiaux : $A = 6,0$ et $St_f = 1,0$



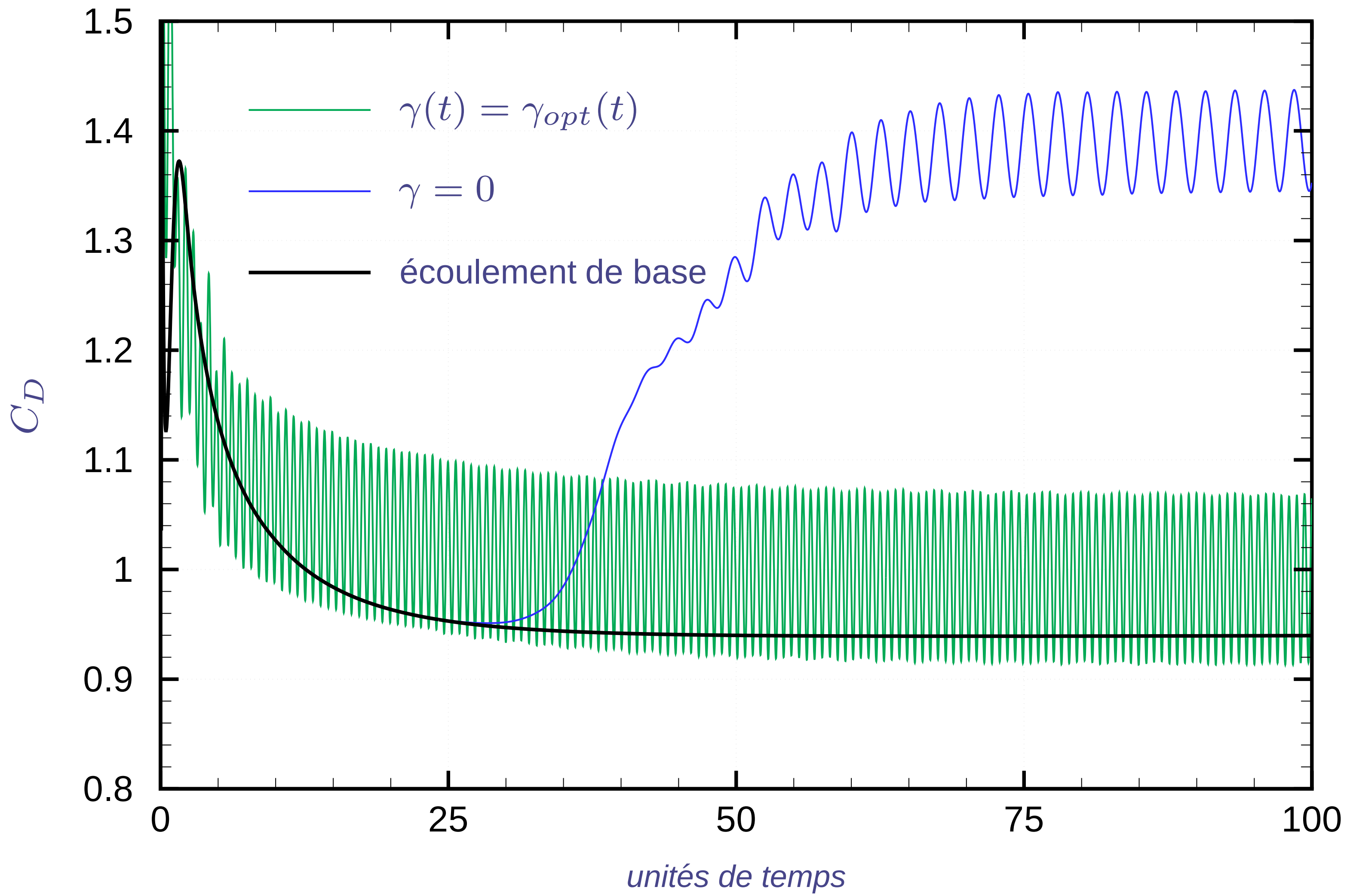


Paramètres de contrôle optimaux : $A = 4,25$ et $St_f = 0,74$

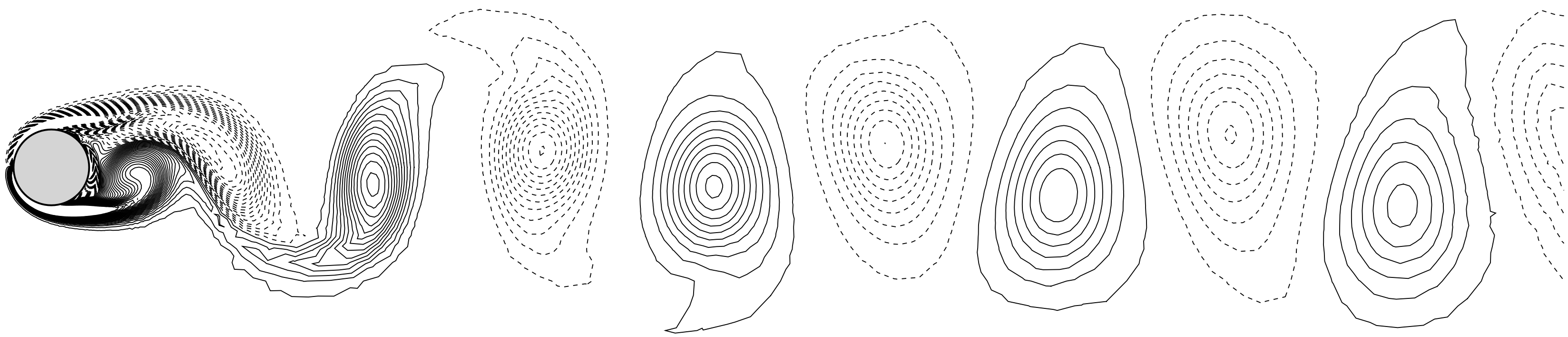
Convergence : coefficient de traînée moyen : $\mathcal{J} = 0,993$,

obtenus en uniquement 4 résolutions de Navier-Stokes

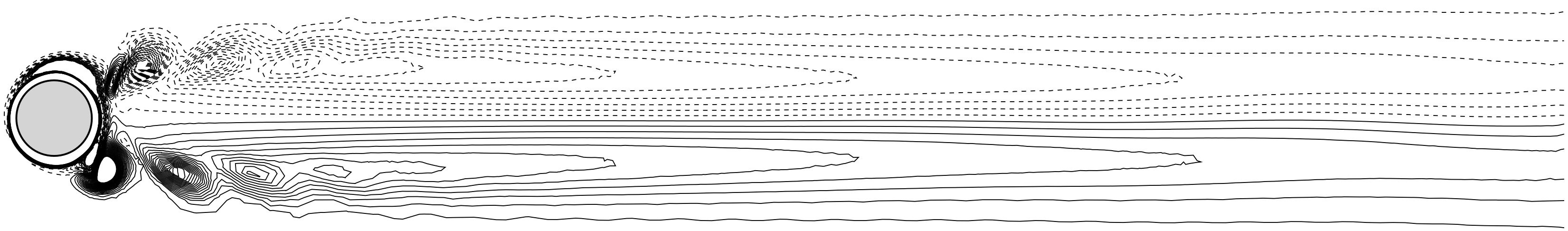
- Loi de contrôle optimale : $\gamma_{opt}(t) = A\sin(2\pi St_f t)$ avec $A = 4,25$ et $St_f = 0,74$



- Diminution relative du coefficient de traînée de 30% ($\mathcal{J}_0 = 1,4 \Rightarrow \mathcal{J}_{opt} = 0,99$)



Écoulement non contrôlé, $\gamma = 0$.



Écoulement contrôlé, $\gamma = \gamma_{opt}$.

Fig. : *Isocontours de vorticité ω_z.*

Écoulement contrôlé : Sillage proche fortement instationnaire, sillage lointain (après 5 diamètres) stationnaire et symétrique $\longrightarrow$ écoulement de base stationnaire instable

III - Base POD réactualisée *Coûts de calcul*

▶ Contrôle optimal Navier-Stokes par He *et al.* (2000) :

$\hookrightarrow$ loi de contrôle harmonique avec $A = 3$ et $St = 0,75$.
$\Rightarrow 30\%$ de réduction de traînée.

▶ Contrôle *optimal* POD ROM :

$\hookrightarrow$ loi de contrôle harmonique avec $A = 4,25$ et $St = 0,74$.
$\Rightarrow 30\%$ de réduction de traînée.

- Stockage mémoire :

  $1\,600$ fois moins de variables par POD ROM que par NSE !

- Temps de calcul :

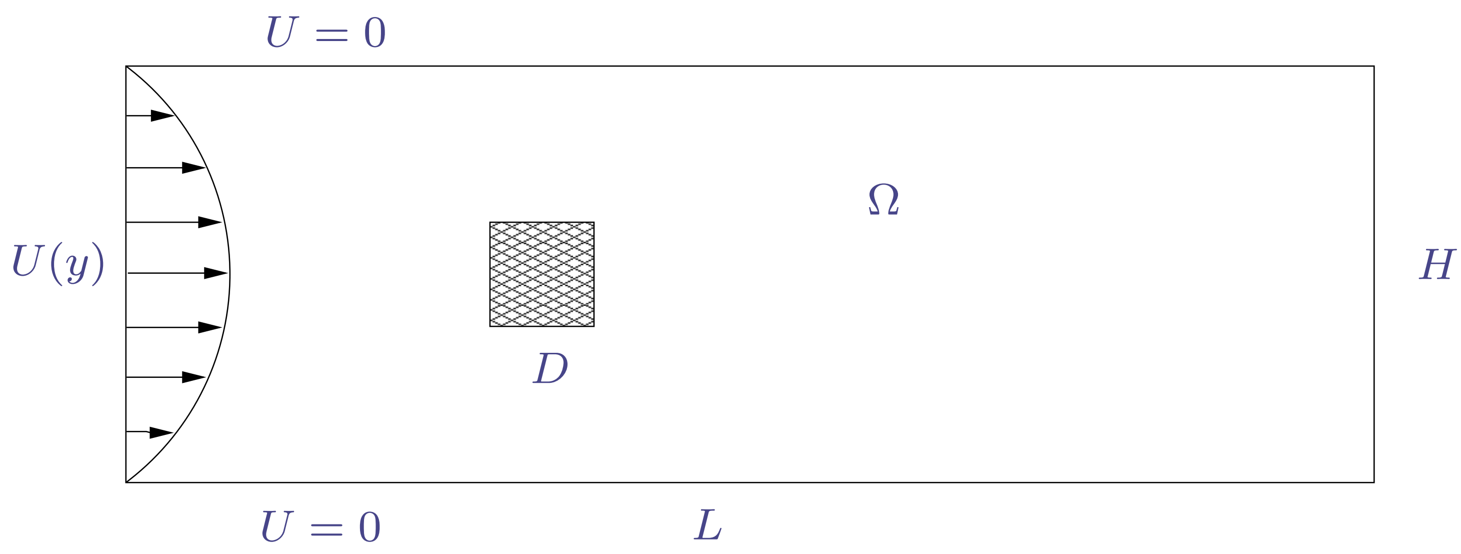
  4 fois inférieur par POD ROM que par NSE (idem équations adjointes et condition d'optimalité).

▶ Améliorer le temps de calcul de la base POD ...

IV - Amélioration du modèle réduit *Configuration*

Travail effectué au MAB avec A. Iollo et C.-H. Bruneau

- Écoulement laminaire 2D autour d'un barreau
- Fluide visqueux, incompressible et newtonien
- Pas de contrôle (pour le moment ...)



- Méthode de pénalisation pour le barreau
- Méthode multigilles V-cycles en espace *Code de C.-H. Bruneau*
- Méthode de Gear en temps

IV - Amélioration du modèle réduit *Présentation*

Objectif : améliorer la représentativité dynamique de méthodes de type projection sur bases globales de l'écoulement :

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = \sum_{k=1}^{N} a_k(t)\boldsymbol{\Phi}_k(\boldsymbol{x}).$$

$\hookrightarrow$ déterminer les coefficients temporels a_k et la base $\boldsymbol{\Phi}$.

- Détermination de la base $\boldsymbol{\Phi}$ par POD :
  - ▶ nécessité d'obtenir des réalisations (snapshots) de l'écoulement (num. ou exp.)
    $\hookrightarrow$ *le temps d'obtention des snapshots peut être assez long ...*
- Détermination des coefficients temporels a_k par POD :
  - ▶ nécessité de construire et de résoudre un système dynamique
    $\hookrightarrow$ *besoin de modéliser les interactions avec modes non résolus (coûteux)*
    $\hookrightarrow$ *erreurs possibles dans construction car nécessité de calcul de gradient (bruit)*
    $\hookrightarrow$ *temps de construction et résolution croît de façon quadratique avec* N

Remarque : critère d'optimalité concerne la base POD $\boldsymbol{\Phi}$ (énergie), mais pas la solution reconstruite $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = \sum_{k=1}^{N} a_k(t)\boldsymbol{\Phi}_k(\boldsymbol{x})$ ...

Méthode : Minimisation de la norme* du residu $\mathcal{R}(u, v, p, t)$ de l'opérateur de Navier-Stokes, restreint à la base POD, à chaque pas de temps.

▶ Avantages :

$\hookrightarrow$ résolution "facile" d'un système linéaire $L\boldsymbol{a} = \boldsymbol{f}$
avec $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^N$, $\boldsymbol{f} \in \mathbb{R}^N$ et $L \in \mathbb{R}^{N\times N}$

$\hookrightarrow$ pas besoin de modéliser les interactions avec modes non résolus
$\Rightarrow$ *a priori* retour vers attracteur NS $\Rightarrow$ SOLUTION STABLE

$\hookrightarrow$ le pas de temps peut être choisit "grand" car structures à grandes échelles

$\hookrightarrow$ le temps de calcul croît linéairement avec N (pas quadratiquement)
$\Rightarrow$ adapté pour systèmes de grande taille

▶ Inconvénients :

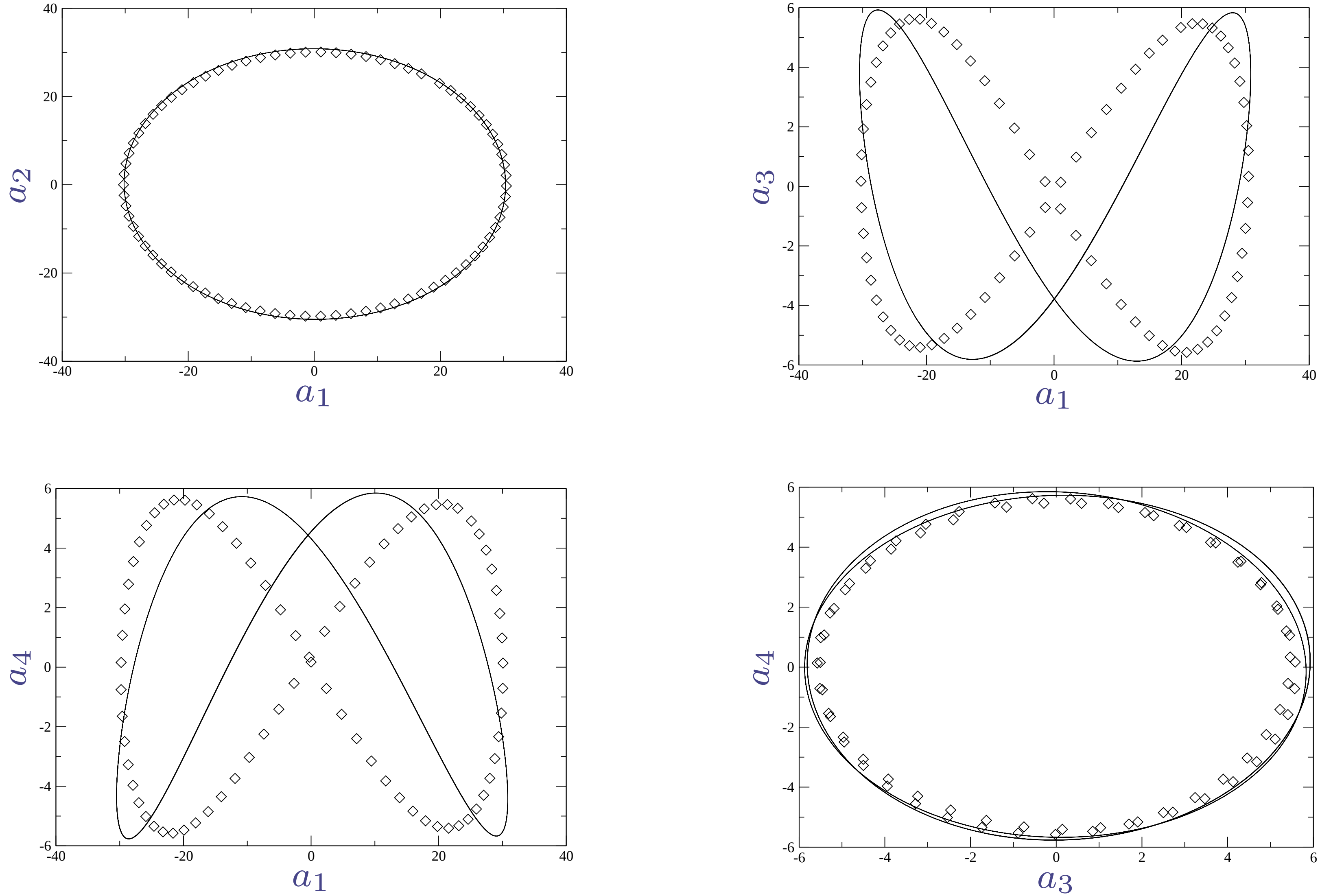
$\hookrightarrow$ besoin d'évaluer le résidu
$\Rightarrow$ nécessité discrétisation de l'opérateur NS (si pas code disponible)

$\hookrightarrow$ cycles limites légèrement différents de ceux de NS (? ?)

* *à bien définir ...*

IV - Amélioration du modèle réduit *Méthode de construction des* $a_k(t)$

- cycles stables aux temps longs (milliers périodes), mais $\neq$ NS !



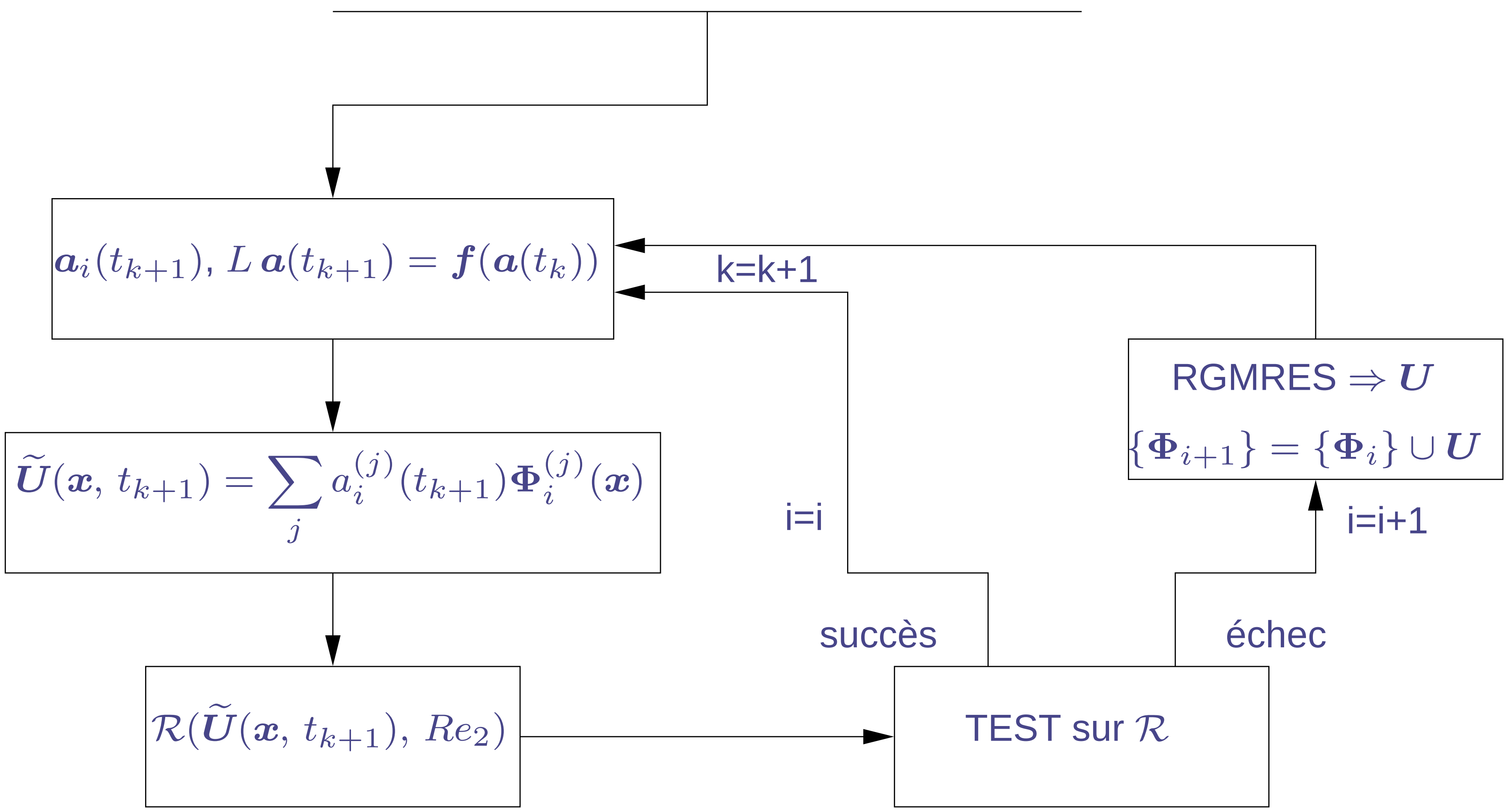
Objectif : *construire ou actualiser une base à une nouvelle dynamique, sans avoir recours à de coûteuses simulations ou expériences.*
$\hookrightarrow$ Exemple : on cherche à actualiser une base construite à Re_1 afin de représenter un écoulement à Re_2.

Algorithme : Initialistaion : k=0. Δt fixé. Calcul d'une base POD initiale $\mathbf{\Phi}$ (à Re_1), puis des coefficients $\boldsymbol{a}(0)$ (minimisation/projection)

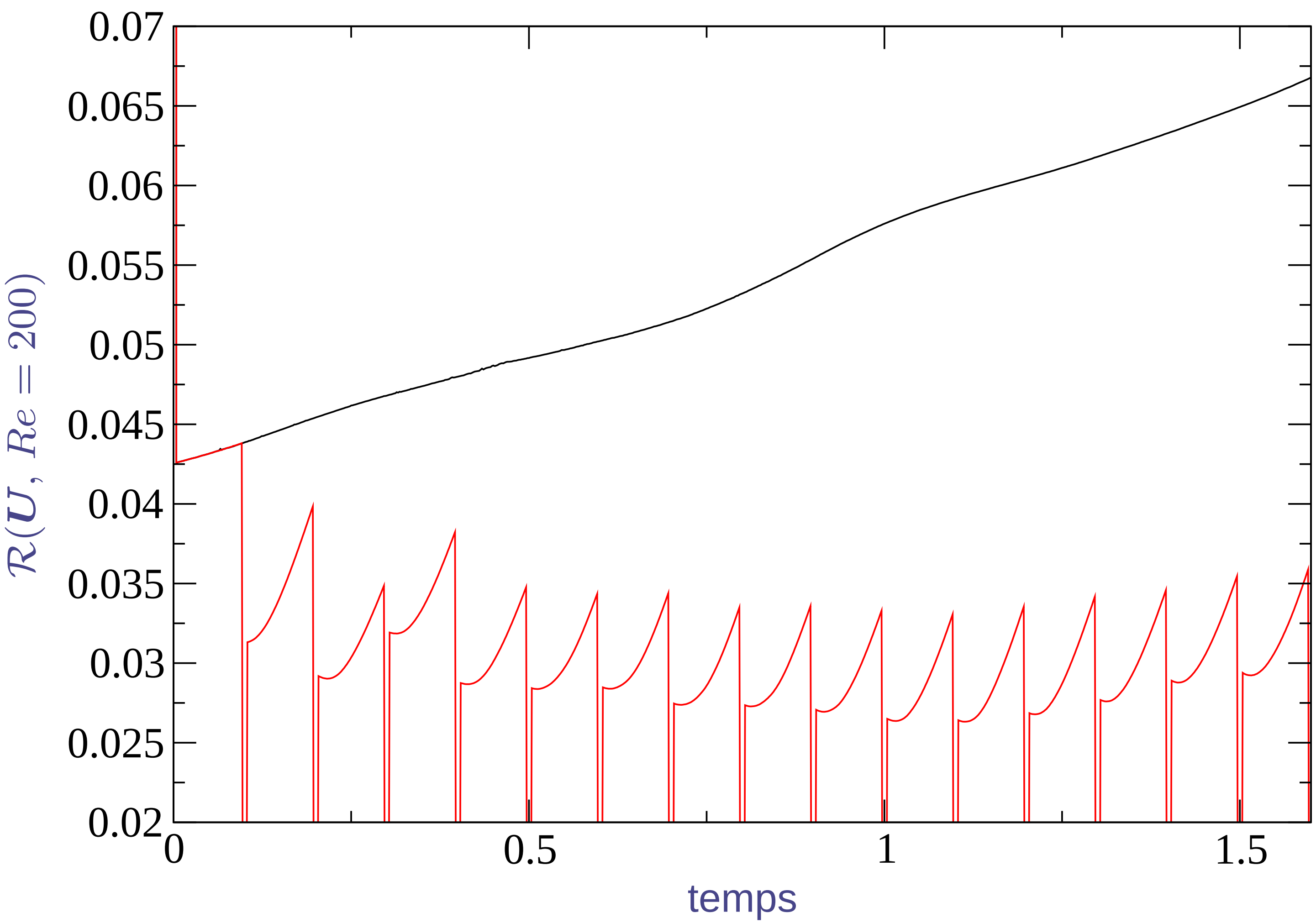
1. Détermination des coefficients $a_i(t_{k+1})$: $L\,\boldsymbol{a}(t_{k+1}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}(t_k))$
2. Construction des champs $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},\, t_{k+1}) = \sum_{i=1}^{N} a_i(t_{k+1})\mathbf{\Phi}_k(\boldsymbol{x})$.
3. Evaluation de la norme du résidu NSE $\mathcal{R}(\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},\, t_{k+1}),\, Re_2)$. Si ce "résidu n'augmente pas de trop", retour à l'étape 1. Sinon :
4. Mise en oeuvre de méthode RGMRes (*Restarted Generalized Minimal Residual*) :
   $k = k + 1$
   (a) Ajout d'un mode à la base POD existante par Gram-Schmidt.
   Ce mode est recherché par minimisation dans l'espace de Krylov engendré par $\mathcal{R}(\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},\, t_{k+1}),\, Re_2)$.
   (b) Retour à l'étape 1

$\hookrightarrow$ Quand la base est jugée trop grande, on fait une compression (POD).

Initialisation : $i = 0$, Re_1, $\boldsymbol{\Phi}_i(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{a}_i(t = 0)$, $k = 0$, $t_k = 0$.

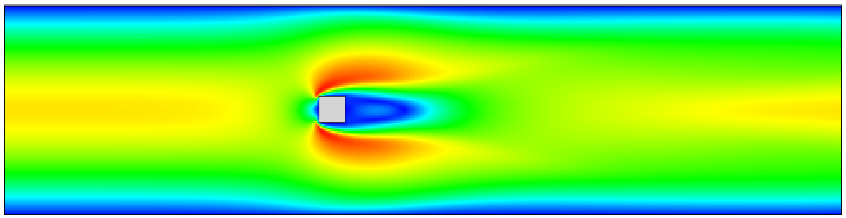


Evolution temporelle du résidu à $Re = 200$.

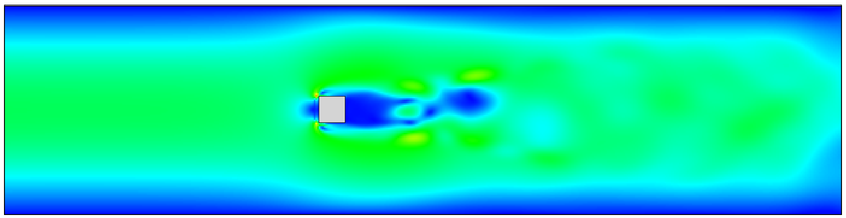


Base à $Re = 100$, base à $Re = 100$ + RGMRes.

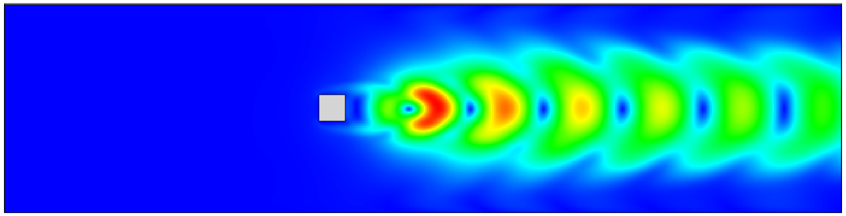
Visualisation des modes POD et des modes RGMRes.



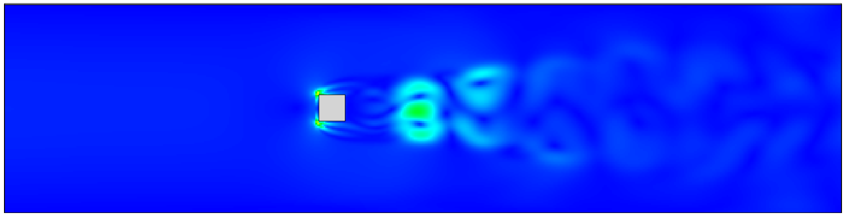
1^{er} *mode POD*



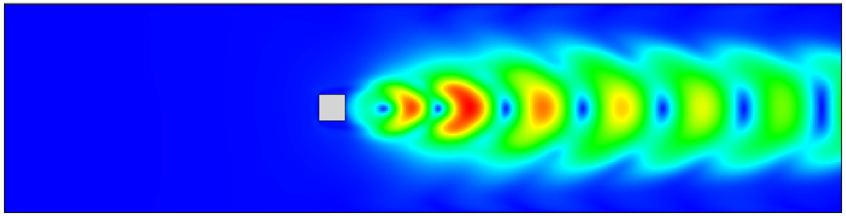
1^{er} *mode RGMRes*



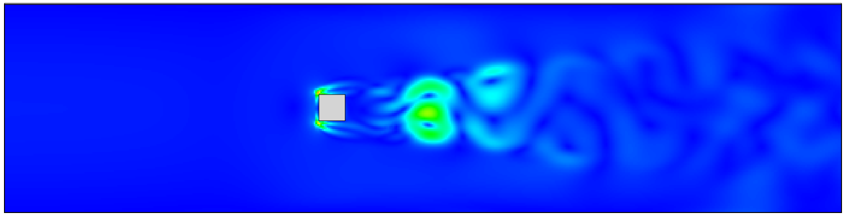
3^{nd} *mode POD*



2^{nd} *mode RGMRes*



3^{eme} *mode POD*



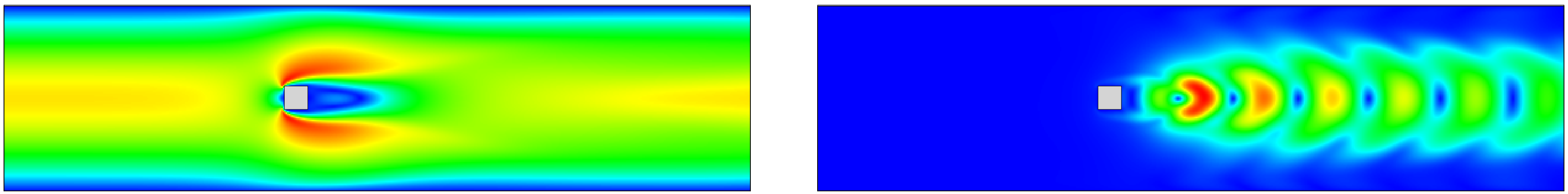
3^{eme} *mode RGMRes*

Modes POD à $Re = 100$

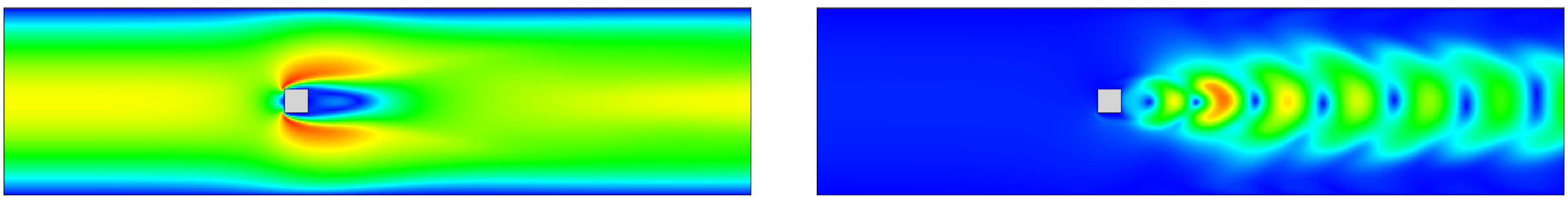
Modes RGMRes à $Re = 200$

La taille de la base peut augmenter très rapidement $\Rightarrow$ faire compression (POD)

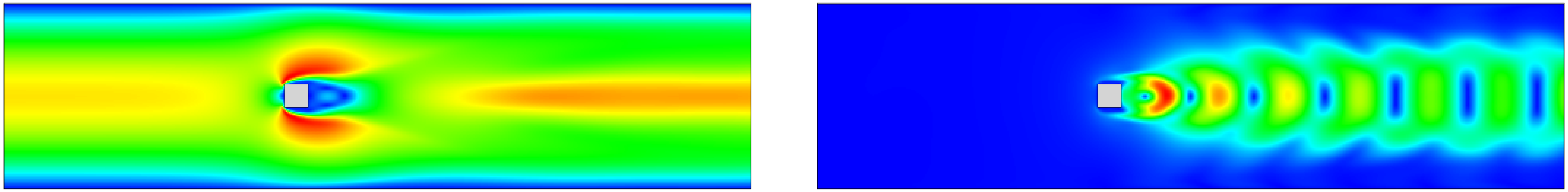
Comparaison des modes POD à $Re = 100$, $Re = 200$ et $Re = 100$ avec RGMRes.



Base POD à $Re = 100$



Base POD à $Re = 100$ *+ RGMRes, après compression POD*



Base POD à $Re = 200$

Observations : *bonne reconstruction des champs de fluctuations,*
mauvaise reconstruction du champs moyen.
$\Rightarrow$ besoin d'une procédure itérative

Conclusions

Optimisation SANS réactualisation de la base POD

▶ Loi de contrôle *sous-optimale* harmonique : $A = 2,2$ et $St_f = 0,53$.

$\hookrightarrow$ 25% de réduction relative de traînée

▶ Réduction des coûts de calculs POD/NSE

$\hookrightarrow$ En temps : 100 fois, en mémoire 600 fois

Optimisation AVEC réactualisation de la base POD (*TRPOD*)

▶ Loi de contrôle *optimale* harmonique : $A = 4,25$ et $St_f = 0,74$.

$\hookrightarrow$ 30% de réduction relative de traînée

▶ Réduction des coûts de calculs POD/NSE

$\hookrightarrow$ En temps : 4 fois, en mémoire $1\,600$ fois

Différences résultats ?

$\Rightarrow$ Méthodes et objectifs mathématiques différents

TRPOD : technique appropriée et efficace pour le contrôle d'écoulements avec preuves de convergence !

Amélioration de la base POD

▶ Actualisation rapide de la base POD, sans résolution NSE

▶ Obtention rapide et efficace des coefficients temporels

$\hookrightarrow$ Résultats encourageants, mais méthode reste à perfectionner

Perspectives

▶ Amélioration méthode de réduction

- Coefficients temporels : essayer de retrouver les cycles limites NS

  $\hookrightarrow$ Trouver la bonne norme pour le résidu

  $\hookrightarrow$ Régulariser, voir pénaliser la fonction objectif

- Base globale POD : déterminer une base fiable (écoulement moyen)

  $\hookrightarrow$ Essayer un processus itératif

▶ Applications

- Contrôle d'écoulements (actualisation rapide de la base) *GDR CDD*

  $\hookrightarrow$ Essayer TRPOD pour écoulements complexes

- Conditions Aux Limites Instationnaires pour les équations de Naviers-Stokes *ANR CALINS*

  $\hookrightarrow$ Coupler LES avec modèle réduit proche paroi