Devoir à la maison n°1

Exercice 1

Soit $G = \left\{a + b\sqrt{2},\ a, b \in \mathbb{Q}\right\} \subseteq \mathbb{R}$. On notera $a+b\sqrt{2}$ les éléments de G sans préciser que $a, b \in \mathbb{Q}$.

1. Montrer que G est un groupe pour l'addition.
2. Prouver que $G \setminus \{0\}$ est un groupe pour la multiplication.
3. On définit la relation $\sim$ sur G par $\left(a + b\sqrt{2} \sim c + d\sqrt{2}\right) \Longleftrightarrow (a - c \in 2\mathbb{Z}$ et $b - d \in \mathbb{Z})$.
   a) Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur G.
   b) Soit H la classe de 0 pour cette relation d'équivalence. Décrire H et vérifier que c'est un sous-groupe de $(G, +)$.
4. Soit $\mathrm{N} : \left\{ \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ a + b\sqrt{2} & \longmapsto & a^2 - 2b^2 \end{array} \right.$.
   a) Vérifier que pour $x \in G$, $\mathrm{N}(x) = 0$ implique $x = 0$.
   b) Montrer que N définit un morphisme de groupes de $(G \setminus \{0\}, \times)$ dans $(\mathbb{Q}^*, \times)$.

Exercice 2 **groupe des quaternions**

On note $\mathbf{GL}(2, \mathbb{C})$ l'ensemble des matrices 2×2 à coefficients complexes inversibles, on rappelle qu'il est muni d'une structure de groupe par le produit matriciel. On note i un nombre complexe de carré -1.

1. Soit $\mathbf{SL}(2, \mathbb{C})$ l'ensemble des matrices de 2×2 à coefficients complexes de déterminant 1. Montrer que $\mathbf{SL}(2, \mathbb{C})$ est un sous-groupe de $\mathbf{GL}(2, \mathbb{C})$.
2. Soit l'ensemble G défini par
$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$
   Montrer que G est un sous-groupe de $\mathbf{SL}(2, \mathbb{C})$, on pourra écrire la table de multiplication du sous-ensemble X de G suivant :
$$X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$
   Le groupe G est-il abélien ?
3. Montrer que G est engendré par $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.

* 4. a) Soient $(\Gamma, \cdot)$ un groupe, σ un automorphisme de Γ et x un élément de Γ d'ordre r, prouver que $\sigma(x)$ est d'ordre r.
   b) Soient $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$ et $x \in G \setminus \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Montrer que $\sigma(x) \neq \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3

Soit G un groupe fini tel que pour tout $x \in G$, $x^2 = e_G$.

1. Montrer que G est abélien.
2. Soient H un sous-groupe de G et $x \in G \setminus H$, on note $K = \langle H \cup \{x\} \rangle$ le sous-groupe engendré par H et x. Montrer que K est l'union disjointe de H et de $xH = \{xh,\ h \in H\}$. En déduire que $|K| = 2|H|$.
3. En déduire que le cardinal $|G|$ de G est une puissance de 2.