N1MA4M11 Algèbre 3

Corrigé du DS n° 1.

$\boxed{1}$

1. Une relation d'équivalence est une relation réflexive, symétrique et transitive.
   - $\mathcal{R}$ est réflexive : en effet, pour tout $x \in G$, $x = exe^{-1}$, donc $x\mathcal{R}\,x$.
   - $\mathcal{R}$ est symmétrique : supposons $x\mathcal{R}y$, alors il existe $z \in G$ tel que $y = zxz^{-1}$. Alors, $x = z^{-1}yz$ donc $y\mathcal{R}x$.
   - $\mathcal{R}$ est transitive : supposons qu'il existe $u \in G$ tel que $y = uxu^{-1}$ et $v \in G$ tel que $z = vyv^{-1}$. Alors
   $$z = vyv^{-1} = v(uxu^{-1})v^{-1} = (vu)x(vu)^{-1}$$
   donc $x\mathcal{R}z$.

   Donc $\mathcal{R}$ est bien une relation d'équivalence. Par définition,
   $$\mathrm{cl}(x) = \{y \in G : x\mathcal{R}y\} = \{zxz^{-1} : z \in G\}.$$

2. Comme $zez^{-1} = zz^{-1} = e$, $\mathrm{cl}(e) = \{e\}$. Pour tout x,
   $$\begin{aligned} \mathrm{cl}(x) = \{x\} &\iff zxz^{-1} = x \text{ pour tout } z \in G \\ &\iff zx = xz \text{ pour tout } z \in G \end{aligned}$$
   donc
   $$\begin{aligned} \text{pour tout } x \in G, \mathrm{cl}(x) = \{x\} &\iff \text{ pour tout } x \in G, z \in G, zx = xz \\ &\iff G \text{ est commutatif.} \end{aligned}$$

3. (a) Montrons d'abord la propriété pour $k \geq 0$, par récurrence sur k. Pour $k = 0$, $(zxz^{-1})^0 = e$ et $zx^0z^{-1} = zz^{-1} = e$ donc la propriété est vraie pour $k = 0$. Supposons que $(zxz^{-1})^k = zx^kz^{-1}$ et calculons $(zxz^{-1})^{k+1}$:
   $$\begin{aligned} (zxz^{-1})^{k+1} &= (zxz^{-1})^k(zxz^{-1}) = (zx^kz^{-1})(zxz^{-1}) \\ &= zx^k(z^{-1}z)xz^{-1} = zx^kexz^{-1} = zx^{k+1}z^{-1}. \end{aligned}$$
   On a donc démontré que, pour tout $k \geq 0$, $(zxz^{-1})^k = zx^kz^{-1}$. En prenant les inverses des deux membres de cette égalité, on obtient $(zxz^{-1})^{-k} = (zx^kz^{-1})^{-1} = zx^{-k}z^{-1}$, donc la propriété est vraie pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

   (b) Supposons donc qu'il existe $z \in G$ tel que $y = zxz^{-1}$. Alors
   $$y^k = e \iff (zxz^{-1})^k = e \iff zx^kz^{-1} = e \iff x^k = z^{-1}z = e.$$
   On a démontré que $y^k = e$ si et seulement si $x^k = e$, donc y et x ont le même ordre.

4. (a) Supposons que $y = zxz^{-1}$. Alors, $f(y) = f(zxz^{-1}) = f(z)f(x)f(z)^{-1}$. Comme H est commutatif, $f(z)f(x)f(z)^{-1} = f(x)f(z)f(z)^{-1} = f(x)$. Donc, on a bien $f(y) = f(x)$.

   (b) D'après le théorème de factorisation des applications vu en cours, puisque l'implication $x\mathcal{R}y \implies f(x) = f(y)$ est vérifiée, f induit une application $\tilde{f} : G/\mathcal{R} \to H$ telle que $\tilde{f}(\mathrm{cl}(x)) = f(x)$.

$\boxed{2}$

1. Par le calcul, on voit que $A^2 = B^2 = \mathrm{Id}$ donc A et B sont d'ordre 2.
2. Notons $G' = \langle A, R\rangle$. Comme $R = BA$, et que A et B appartiennent à G, $R \in G$. Par définition, G' est le plus petit sous-groupe contenant A et R ; comme G contient A et R, $G' \subset G$.

   Réciproquement, $B = RA^{-1}$ appartient à G'. Donc G' contient A et B, donc il contient le plus petit sous-groupe contenant A et B, c'est-à-dire G. Donc $G \subset G'$.
3. On remarque que
$$R = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4)\\ \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4)\end{pmatrix}$$
   donc R est la matrice de la rotation d'angle $\pi/4$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Notons $R(\theta)$ la matrice de la rotation d'angle θ ; alors $R = R(\pi/4)$, et $R^k = R(k\pi/4)$. Comme $R(k\pi/4) = \mathrm{Id}$ si et seulement si $k\pi/4 = 0 \mod 2\pi$ c'est-à-dire $k = 0 \mod 8$, R est d'ordre 8.
4. $\det(A) = -1$ et $\det(R) = 1$ donc on ne peut pas avoir $A = R^k$ sinon $\det(A) = \det(R)^k = 1$.
5. Puisque R est d'ordre 8, les matrices R^i pour $0 \le i \le 7$ sont deux à deux distinctes. De même, les matrices AR^j pour $0 \le j \le 7$ sont deux à deux distinctes car, si $AR^j = AR^k$, alors $R^j = R^k$. Enfin, si $AR^j = R^k$, alors $A = R^{k-j} \in \langle R\rangle$ ce qui est faux d'après la question précédente. Donc les 16 éléments R^i, AR^j, pour $0 \le i, j \le 7$, sont deux à deux distincts.
6. On a $RAR = BAABA = BBA = A$ en utilisant $A^2 = B^2 = \mathrm{Id}$ (question 1.), donc $RA = AR^{-1}$.
7. Posons $H := \{R^i, AR^j : 0 \le i, j \le 7\}$. On a vu que $|H| = 16$. Montrons que H est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$. Il suffit de montrer que $xy^{-1} \in H$ pour tout $x, y \in H$. Examinons les cas possibles :
   - $x = R^i$, $y = R^j$. Alors $xy^{-1} = R^{i-j} \in H$.
   - $x = AR^i$, $y = R^j$. Alors $xy^{-1} = AR^{i-j} \in H$.
   - $x = R^i$, $y = AR^j$. Alors $xy^{-1} = R^{i-j}A^{-1} = R^{i-j}A$. En itérant la relation $RA = AR^{-1}$, on obtient $R^kA = AR^{-k}$, donc $xy^{-1} = R^{i-j}A = AR^{j-i} \in H$.
   - $x = AR^i$, $y = AR^j$. Alors $xy^{-1} = AR^{i-j}A = AAR^{j-i} = R^{j-i} \in H$.

   Donc H un sous-groupe de G.

   D'après la question 2., $G = \langle A, R\rangle$. Comme G est un groupe et qu'il contient A et R, il contient tout produit de A et R, donc tous les éléments de H. Donc $H \subset G$. Comme H est un groupe, contenant aussi A et R, et que G est le plus petit sous-groupe contenant A et R, on a l'égalité $G = H$.