Feuille de TD n°1

Ensembles

Exercice 1

On considère trois parties A, B et C d'un ensemble E.

1. On suppose que $A \cup B = A \cap C$ et $C \cup A = C \cap B$. Montrer que $A = B = C$.
2. Montrer l'équivalence suivante : $(A \cup B \subset A \cup C \quad \text{et} \quad A \cap B \subset A \cap C) \Longleftrightarrow B \subset C$.

Exercice 2

Soit E un ensemble fini à n éléments, on définit $\mathcal{E} = \left\{(A,B) \in \mathcal{P}(E)^2\,,\ A \cup B = E\right\}$.

1. a) Rappeler le cardinal de $\mathcal{P}(E)$.
   b) Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ de cardinal k. Calculer le cardinal de l'ensemble
   $$\mathcal{E}_A = \{B \in \mathcal{P}(E)\,,\ A \cup B = E\}\,.$$
   c) En déduire le cardinal de $\mathcal{E}$.
2. Retrouver le cardinal de $\mathcal{E}$ en utilisant le fait que si deux parties A, B de E vérifient $A \cup B = E$, alors tout élément de E est ou bien dans $A \setminus B$, ou bien dans $B \setminus A$, ou bien dans $A \cap B$.

Applications

Exercice 3 Partie stable par une application

Soient E un ensemble et $f : E \longrightarrow E$ une application. On note $f^0 = Id_E$ et pour un entier $n \in \mathbb{N}^\star$, $f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$. Pour $A \subseteq E$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = f^n(A) \qquad \text{et} \qquad B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

1. Montrer que $f(B) \subseteq B$.
2. Montrer que B est la plus petite partie de E (pour l'inclusion) qui est stable par f et contenant A.

Exercice 4

Soient E, F deux ensembles, $f : E \longrightarrow F$ une application, $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E et $(B_j)_{j \in J}$ une famille de parties de F.

1. Montrer que $f^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(B_j) \qquad \text{et} \qquad f^{-1}\left(\bigcap_{j \in J} B_j\right) = \bigcap_{j \in J} f^{-1}(B_j)$.
2. Montrer que $f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i) \qquad \text{et} \qquad f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(A_i)$.
3. Montrer que l'inclusion ci-dessus peut être stricte.

Exercice 5 Factorisation d'une application

Soient E, F et G des ensembles.

1. Soient $f : F \longrightarrow E$ et $g : G \longrightarrow E$ deux applications. Montrer qu'il existe une application $h : G \longrightarrow F$ tel que $f \circ h = g$ si et seulement si $g(G) \subseteq f(F)$. À quelle condition h est-elle unique ?
2. Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : E \longrightarrow G$ deux applications. Montrer qu'il existe une application $h : F \longrightarrow G$ telle que $h \circ f = g$ si et seulement si
   $$\forall x, y \in E,\ (f(x) = f(y) \Longrightarrow g(x) = g(y))\,.$$
   À quelle condition h est-elle unique ?

Exercice 6

Soit E un ensemble, pour $A \in \mathcal{P}(E)$, on définit l'application $f_A : \left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ B & \longmapsto & B \cap A \end{array}\right.$. Montrer que si $A \neq E$, alors f_A n'est ni injective, ni surjective.

Exercice 7 Permutations.

1. Soit n un entier naturel non nul, déterminer le cardinal de l'ensemble des applications bijectives de $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ dans $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$.
2. Décrire explicitement cet ensemble pour $n = 3$.

Exercice 8 Ensembles équipotents.

Soient E et F deux ensembles. On définit les notions suivantes :

– E est *moins puissant* que F s'il existe une injection $f : E \longrightarrow F$,
– E est *plus puissant* que F s'il existe une surjection $f : E \longrightarrow F$,
– E et F sont *équipotents* s'il existe une bijection $f : E \longrightarrow F$.

1. Si $E \neq \emptyset$, montrer que E est moins puissant que F si et seulement si F est plus puissant que E.
2. Prouver que $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^\star$, $\{n \in \mathbb{N},\, 3|n\}$ et $\mathbb{Z}$ sont équipotents deux à deux.
3. Montrer que E est moins puissant que $\mathcal{P}(E)$.
4. Dans cette question, on montre que E est $\mathcal{P}(E)$ ne sont jamais équipotents.
   a) Soit $f : E \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ une application quelconque, on pose alors $A = \{x \in E,\, x \notin f(x)\}$. Démontrer que $A \notin f(E)$.
   b) Conclure.

Exercice 9

Soit E un ensemble et $f : E \longrightarrow E$ une application telle que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que

$$(f \text{ est injective}) \Longleftrightarrow (f \text{ est surjective})\,.$$

Relations d'équivalence

Exercice 10

On fixe un entier naturel n non nul et on définit la relation binaire suivante sur $\mathbb{Z}$:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, \qquad (a\mathcal{R}_n b) \Longleftrightarrow (n\,|(b-a))\,.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}_n$ définit une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.
2. Donner un système de représentants des classes d'équivalence de $\mathcal{R}_n$.
3. Calculer le cardinal de l'ensemble quotient $\mathbb{Z}/\mathcal{R}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
4. Soit m un entier naturel non nul tel que n divise m. Définir une application $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Exercice 11

On définit une relation binaire sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^\star$ par

$$\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^\star, \qquad ((a, b) \sim (c, d)) \Longleftrightarrow (ad = bc)\,.$$

1. Montrer que $\sim$ définit une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^\star$.
2. Décrire les classes d'équivalence.
3. Que peut-on dire de l'ensemble quotient ?

Exercice 12

Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathbb{R}$ par $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $x^2y + y = xy^2 + x$. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$. Décrire les classes d'équivalence pour la relation $\mathcal{R}$.

Exercice 13

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on désigne par P_n le nombre de relations d'équivalence sur un ensemble fini de cardinal n. En particulier, on a $P_0 = 1$.

1. Calculer P_1, P_2, P_3 et P_4.
2. Soit n un entier naturel. Montrer la relation $P_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P_k$.
3. En déduire la formule $P_n = \dfrac{1}{e} \displaystyle\sum_{k \geqslant 0} \dfrac{k^n}{k!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.