Probabilités-Statistiques TP 3
Illustration numérique de convergence p.s.

Rappel : taper `vnc://nom_du_serveur` dans un terminal.
Les sujets et les corrigés des TPs sont mis le lendemain des séances sur ma page :
http://www.math.u-bordeaux1.fr/~chabanol/TP_agreg.html
Pour illustrer une convergence en loi $X_n \to X$, on fixe n_0 grand et on "illustre" que X_{n_0} et X ont à peu près même loi, par exemple à l'aide d'un échantillon de X_{n_0}.
Pour illustrer une convergence p.s. $X_n \to X$, on fait comme pour illustrer la convergence d'une suite (u_n) : on génère une instance de la suite $(X_1, \ldots, X_{n_0})$ de 1 (avec n_0 grand), on trace X_n en fonction de n et on montre que "la courbe semble avoir une asymptote horizontale". Si la limite X est aléatoire, la limite observée sera différente si on recommence avec une autre instance de la suite.

1. Convergence presque sûre vers une constante

(1) Soit (X_n) une suite de v.a. indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$. On pose pour tout entier n $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

- (a) Examiner le sens de variation de la suite M_n et justifier que M_n converge p.s.
- (b) Générer un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ et obtenir le vecteur $(M_1, \ldots, M_n)$ correspondant. Il est important que le vecteur $(M_1, \ldots, M_n)$ soit obtenu à partir du même échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$. Illustrer la convergence précédente en traçant M_n en fonction de n; recommencer l'expérience avec un autre échantillon; la limite semble-t-elle aléatoire ? Devinez-la (si ce n'est pas déjà fait...) et prouvez le.

2. Illustration de la loi des grands nombres

Rappel : d'après la loi forte des grands nombres, si $(X_n)_{n \in N}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes intégrables, de même loi, d'espérance m, alors pour presque tout ω, $\frac{\sum_{i=1}^n X_i(\omega)}{n}$ converge vers m : la moyenne arithmétique converge vers l'espérance.

On va par exemple travailler avec une variable aléatoire X de loi uniforme sur $\{1,2,3,4,5,6\}$ (on va simuler un lancer de dés).

- (a) *Quelle est l'espérance m de X ?*
- (b) *Générer un échantillon de X de taille* 5000*; obtenir un vecteur avec les valeurs successives des $\sum_{i=1}^n X_i$ pour n allant de 1 à 5000 (penser à* `cumsum`*); puis obtenir un vecteur avec les valeurs successives des $\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ pour n allant de 1 à 5000.*
- (c) *Représenter sur un même graphe les $\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ en fonction de n, ainsi qu'une droite horizontale correspondant à l'espérance : on peut constater la convergence.*
- (d) *Tracer $n^{0.1}(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - m)$ en fonction de n. Quelle semble être sa limite ? Tracer également $n(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - m)$ en fonction de n. Quel est son comportement ? Tracer maintenant $\sqrt{n}(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - m)$ en fonction de n : il n'y a pas de convergence p.s., mais on n'observe pas non plus de valeurs extrêmement élevées : on voit le rôle du $\sqrt{n}$ présent dans le théorème central limite.*
- (e) *Question subsidiaire. Refaire les questions 2 et 5 avec une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur* $[0,1]$.
- (f) Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Cauchy de densité $\frac{1}{\pi(1+x^2)}$. Peut-on appliquer la loi forte des grands nombres à cette suite ?
- (g) *Quelle est la fonction de répartition de X_1 ?*

(h) *Numériquement, observez-vous une convergence presque sûre de* $M_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ *?*

(i) *On admettra que la fonction caractéristique de* X_1 *est* $E[\exp(itX_1)] = \exp(-|t|)$ *(le calcul se fait par les résidus). En déduire la fonction caractéristique de* M_n *et identifier sa loi*

(j) *Illustrer le résultat précédent*

3. Convergence presque sûre mais pas vers une constante

(2) *Générer un 30-échantillon* E *de loi de Bernoulli de paramètre* 0.5.

(3) *Obtenir un vecteur contenant les* $\sum_{i=1}^n \frac{E_i}{2^i}$, *pour* n *allant de 1 à 30.*

(4) *La suite* $u_n = \sum_{i=1}^n \frac{E_i}{2^i}$ *vous semble-t-elle converger ?*

(5) *Refaites l'expérience avec un autre échantillon* : on observe encore une convergence (il y a encore convergence p.s.), mais la limite est différente : elle est aléatoire.

(6) Pour observer la loi de cette valeur limite, on va en fait... illustrer la convergence en loi. *Fixer* n_0 *grand, générer un échantillon de* (u_{n_0}) *et deviner la loi limite.*

(7) *Question subsidiaire, que vous pouvez regarder chez vous. Prouver cette convergence en loi.*

(8) *Question subsidiaire. Mêmes questions si* E *ne suit pas une loi de Bernoulli mais une loi uniforme sur* $\{-1, 1\}$.

(9) *Question subsidiaire. Mêmes questions numériques avec la série* $\sum_n \frac{A_n}{3^n}$ *où les* A_n *sont i.i.d de loi uniforme sur* $\{0, 2\}$ *: on peut montrer qu'elle converge en loi vers une loi uniforme sur l'ensemble de Cantor.*

4. Polya

Une urne contient initialement r boules rouges et b boules bleues. Une opération consiste à tirer une boule au hasard dans l'urne, regarder sa couleur, et la remettre avec une boule de la même couleur dans l'urne (donc à chaque opération le nombre de boules est augmenté de 1). On note R_n le nombre de boules rouges après la n-ième opération, X_n la proportion de boules rouges au bout de n opérations et Y_n la proportion de boules bleues.
On a donc $R_0 = r$, $X_0 = \frac{r}{r+b}$, $X_n = \frac{R_n}{r+b+n}$.

(1) Expliquer pourquoi si $k \geq r$ $P(R_{n+1} = k + 1 | R_n = k) = \frac{k}{r+b+n}$.
Que vaut $P(R_{n+1} = k | R_n = k)$?

(2) Compléter la fonction ci-dessous pour qu'en lui donnant en paramètre r, b, n et le nombre de boules rouges à l'instant n elle simule une opération, et fournisse le nombre de boules rouges à l'instant $n+1$:

```
function res=Urne(Rouge,n,r,b)
U=rand(1);
res=Rouge+(U<...);
end;
```

(3) Simuler la suite (X_n). Observez-vous numériquement une convergence presque sûre de X_n, de Y_n et de $\frac{X_n}{Y_n}$? (vous pouvez essayer plusieurs valeurs de r et b). Si oui, la limite de X_n est-elle aléatoire ou déterministe ?

(4) Pouvez-vous deviner la loi limite de X_n dans le cas $r = b = 1$? Pour le prouver, on peut dans le cas $r = b = 1$ montrer par récurrence que R_n suit une loi uniforme sur $\{1, \ldots, n\}$, en déduire la fonction caractéristique de X_n puis sa limite.