

STATISTIQUE : TESTS D'HYPOTHESES

Préparation à l'Agrégation Bordeaux 1

Année 2013 - 2014

Jean-Jacques Ruch

Table des Matières

Chapitre I. Généralités sur les tests	5
1. Introduction	5
2. Principe des tests	6
2.a. Méthodologie	6
2.b. Hypothèse nulle - hypothèse alternative	6
2.c. Statistique et niveau de signification	6
3. Risques d'erreur	7
4. Puissance d'un test	8
Chapitre II. Fonction de répartition empirique	9
1. Introduction	9
2. Théorème de Glivenko-Cantelli	10
3. Test de Kolmogorov	11
4. Test de Kolmogorov-Smirnov	12

CHAPITRE I

Généralités sur les tests

1. Introduction

Un *test d'hypothèse* est un procédé d'inférence permettant de contrôler (accepter ou rejeter) à partir de l'étude d'un ou plusieurs échantillons aléatoires, la validité d'hypothèses relatives à une ou plusieurs populations. Les méthodes de l'inférence statistique nous permettent de déterminer, avec une probabilité donnée, si les différences constatées au niveau des échantillons peuvent être imputables au hasard ou si elles sont suffisamment importantes pour signifier que les échantillons proviennent de populations vraisemblablement différentes.

On distinguera deux classes de tests :

- Les *tests paramétriques* requierent un modèle à fortes contraintes (normalité des distributions ou approximation normale pour des grands échantillons). Ces hypothèses sont d'autant plus difficiles à vérifier que les effectifs étudiés sont plus réduits.
- Les *tests non paramétriques* sont des tests dont le modèle ne précise pas les conditions que doivent remplir les paramètres de la population dont a été extrait l'échantillon. Il n'y a pas d'hypothèse de normalité au préalable.

Les tests paramétriques, quand leurs conditions sont remplies, sont les plus puissants que les tests non paramétriques. Les tests non paramétriques s'emploient lorsque les conditions d'applications des autres méthodes ne sont pas satisfaites, même après d'éventuelles transformation de variables. Ils peuvent s'utiliser même pour des échantillons de taille très faible.

On distingue les tests suivant :

- Le *test de conformité* consiste à confronter un paramètre calculé sur l'échantillon à une valeur pré-établie. Les plus connus sont certainement les tests portant sur la moyenne, la variance ou sur les proportions. On connaît la loi théorique en général la loi normale. Par exemple, dans un jeu de dés à 6 faces, on sait que la face 3 a une probabilité de $1/6$ d'apparaître. On demande à un joueur de lancer (sans précautions particulières) 100 fois le dé, on teste alors si la fréquence d'apparition de la face 3 est compatible avec la probabilité $1/6$. Si ce n'est pas le cas, on peut se poser des questions sur l'intégrité du dé.
- Le *test d'ajustement ou d'adéquation* consiste à vérifier la compatibilité des données avec une distribution choisie a priori. Le test le plus utilisé dans cette optique est le test d'ajustement à la loi normale, qui permet ensuite d'appliquer un test paramétrique .
- Le *test d'homogénéité ou de comparaison* consiste à vérifier que K ($K \geq 2$) échantillons (groupes) proviennent de la même population ou, cela revient à la même chose, que la distribution de la variable d'intérêt est la même dans les K échantillons. Y a-t-il une différence entre le taux de glucose moyen mesuré pour deux échantillons d'individus ayant reçu des traitements différents ?
- Le *test d'indépendance ou d'association* consiste à éprouver l'existence d'une liaison entre 2 variables. Les techniques utilisées diffèrent selon que les variables sont qualitatives nominales, ordinales ou quantitatives. Est-ce que la distribution de la couleur des yeux observée dans la population française fréquences est indépendante du sexe des individus ?

2. Principe des tests

2.a. Méthodologie.

Le principe des tests d'hypothèse est de poser une hypothèse de travail et de prédire les conséquences de cette hypothèse pour la population ou l'échantillon. On compare ces prédictions avec les observations et l'on conclut en acceptant ou en rejetant l'hypothèse de travail à partir de règles de décisions objectives. Définir les hypothèses de travail, constitue un élément essentiel des tests d'hypothèses de même que vérifier les conditions d'application de ces dernières.

Différentes étapes doivent être suivies pour tester une hypothèse :

- (1) définir l'hypothèse nulle, notée H_0 , à contrôler ;
- (2) choisir une statistique pour contrôler H_0 ;
- (3) définir la distribution de la statistique sous l'hypothèse « H_0 est réalisée » ;
- (4) définir le niveau de signification du test α et la région critique associée ;
- (5) calculer, à partir des données fournies par l'échantillon, la valeur de la statistique ;
- (6) prendre une décision concernant l'hypothèse posée .

2.b. Hypothèse nulle - hypothèse alternative.

L'*hypothèse nulle* notée H_0 est l'hypothèse que l'on désire contrôler : elle consiste à dire qu'il n'existe pas de différence entre les paramètres comparés ou que la différence observée n'est pas significative et est due aux fluctuations d'échantillonnage. Cette hypothèse est formulée dans le but d'être rejetée.

L'*hypothèse alternative* notée H_1 est la "négation" de H_0 , elle est équivalente à dire « H_0 est fausse ». La décision de rejeter H_0 signifie que H_1 est réalisée ou H_1 est vraie.

Remarque : Il existe une dissymétrie importante dans les conclusions des tests. En effet, la décision d'accepter H_0 n'est pas équivalente à « H_0 est vraie et H_1 est fausse ». Cela traduit seulement l'opinion selon laquelle, il n'y a pas d'évidence nette pour que H_0 soit fausse. Un test conduit à rejeter ou à ne pas rejeter une hypothèse nulle jamais à l'accepter d'emblée.

La nature de H_0 détermine la façon de formuler H_1 et par conséquent la nature unilatérale ou bilatérale du test. On parle de *test bilatéral* lorsque l'hypothèse alternative se "décompose en deux parties". Par exemple si H_0 consiste à dire que la population estudiantine avec une fréquence de fumeurs p est représentative de la population globale avec une fréquence de fumeurs p_0 , on pose alors : $H_0 : p = p_0$ et $H_1 : p \neq p_0$. Le test sera bilatéral car on considère que la fréquence p peut être supérieure ou inférieure à la fréquence p_0 .

On parle de *test unilatéral* lorsque l'hypothèse alternative se "compose d'une seule partie". Par exemple si l'on fait l'hypothèse que la fréquence de fumeurs dans la population estudiantine p est supérieure à la fréquence de fumeurs dans la population p_0 , on pose alors $H_0 : p = p_0$ et $H_1 : p > p_0$. Le test sera unilatéral car on considère que la fréquence p ne peut être que supérieure à la fréquence p_0 .

Il aurait été possible également d'avoir : $H_0 : p = p_0$ et $H_1 : p < p_0$

2.c. Statistique et niveau de signification.

Une *statistique* est une fonction des variables aléatoires représentant l'échantillon. Le choix de la statistique dépend de la nature des données, du type d'hypothèse que l'on désire contrôler, des affirmations que l'on peut admettre concernant la nature des populations étudiées La valeur numérique de la statistique obtenue pour l'échantillon considéré permet de distinguer entre H_0 vraie et H_0 fausse.

Connaissant la loi de probabilité suivie par la statistique S sous l'hypothèse H_0 , il est possible d'établir une valeur seuil, S_{seuil} de la statistique pour une probabilité donnée appelée le *niveau de signification* α du test. La région critique $R_c = f(S_{seuil})$ correspond à l'ensemble des valeurs telles que : $\mathbb{P}(S \in R_c) = \alpha$. Selon la nature unilatérale ou bilatérale du test, la définition de la région critique varie.

Test	Unilatéral		Bilatéral
	$H_0 : t = t_0$		$H_0 : t = t_0$
Hypothèse alternative	$H_1 : t > t_0$	$H_1 : t < t_0$	$H_1 : t \neq t_0$
Niveau de signification	$\mathbb{P}(S > S_{seuil}) = \alpha$	$\mathbb{P}(S < S_{seuil}) = \alpha$	$\mathbb{P}(S > S_{seuil}) = \alpha$

Il existe deux stratégies pour prendre une décision en ce qui concerne un test d'hypothèse : la première stratégie fixe à priori la valeur du seuil de signification α et la seconde établit la valeur de la probabilité critique α_{obs} à posteriori.

Règle de décision 1 :

Sous l'hypothèse « H_0 est vraie » et pour un seuil de signification α fixé

- si la valeur de la statistique S_{obs} calculée appartient à la région critique alors l'hypothèse H_0 est rejetée au risque d'erreur α et l'hypothèse H_1 est acceptée ;
- si la valeur de la statistique S_{obs} n'appartient pas à la région critique alors l'hypothèse H_0 ne peut être rejetée.

Remarque : Le choix du niveau de signification ou risque α est lié aux conséquences pratiques de la décision ; en général on choisira $\alpha = 0,05$, $0,01$ ou $0,001$.

Règle de décision 2 :

La probabilité critique α telle que $P(S \geq S_{obs}) = \alpha_{obs}$ est évaluée

- si $\alpha_{obs} \geq \alpha$ l'hypothèse H_0 est acceptée car le risque d'erreur de rejeter H_0 alors qu'elle est vraie est trop important ;
- si $\alpha_{obs} < \alpha$ l'hypothèse H_0 est rejetée car le risque d'erreur de rejeter H_0 alors qu'elle est vraie est très faible.

3. Risques d'erreur

Définition 1. On appelle risque d'erreur de première espèce la probabilité de rejeter H_0 et d'accepter H_1 alors que H_0 est vraie.

Ceci se produit si la valeur de la statistique de test tombe dans la région de rejet alors que l'hypothèse H_0 est vraie. La probabilité de cet événement est le niveau de signification α . On dit aussi que le niveau de signification est la probabilité de rejeter l'hypothèse nulle à tort.

Remarque : La valeur du risque α doit être fixée a priori par l'expérimentateur et jamais en fonction des données. C'est un compromis entre le risque de conclure à tort et la faculté de conclure.

La région critique diminue lorsque α décroît (voir intervalle de confiance) et donc on rejette moins fréquemment H_0 . A vouloir commettre moins d'erreurs, on conclut plus rarement.

Exemple : Si l'on cherche à tester l'hypothèse qu'une pièce de monnaie n'est pas « truquée », nous allons adopter la règle de décision suivante :

H_0 : la pièce n'est pas truquée

– est acceptée si $X \in [40, 60]$

– rejetée si $X \notin [40, 60]$ donc soit $X < 40$ ou $X > 60$

avec X « nombre de faces » obtenus en lançant 100 fois la pièce. Le risque d'erreur de première espèce est $\alpha = \mathbb{P}(B(100, 1/2) \in [40, 60])$.

Définition 2. On appelle risque d'erreur de seconde espèce, notée β la probabilité de rejeter H_1 et d'accepter H_0 alors que H_1 est vraie.

Ceci se produit si la valeur de la statistique de test ne tombe pas dans la région de rejet alors que l'hypothèse H_1 est vraie.

Remarque : Pour quantifier le risque β , il faut connaître la loi de probabilité de la statistique sous l'hypothèse H_1 .

Exemple : Si l'on reprend l'exemple précédent de la pièce de monnaie, et que l'on suppose la probabilité d'obtenir face est de 0,6 pour une pièce truquée. En adoptant toujours la même règle de décision : H_0 : la pièce n'est pas truquée

- est acceptée si $X \in [40, 60]$
 - rejetée si $X \notin [40, 60]$ donc soit $X < 40$ ou $X > 60$
- avec X « nombre de faces » obtenues en lançant 100 fois la pièce. Le risque de seconde espèce est $\beta = \mathbb{P}(B(100, 0, 6) \in [40, 60])$.

4. Puissance d'un test

Rappelons que les tests ne sont pas faits pour « démontrer » H_0 mais pour « rejeter » H_0 . L'aptitude d'un test à rejeter H_0 alors qu'elle est fautive constitue la puissance du test.

Définition 3. On appelle puissance d'un test, la probabilité de rejeter H_0 et d'accepter H_1 alors que H_1 est vraie. Sa valeur est $1 - \beta$

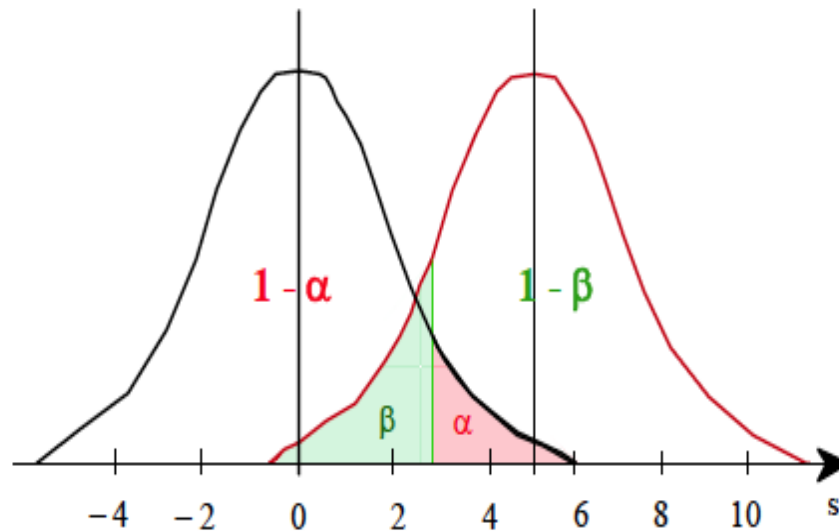
La puissance d'un test est fonction de la nature de H_1 , un test unilatéral est plus puissant qu'un test bilatéral. Elle augmente avec taille de l'échantillon N étudié, et diminue lorsque α diminue.

La robustesse d'une technique statistique représente sa sensibilité à des écarts aux hypothèses faites.

Les différentes situations que l'on peut rencontrer dans le cadre des tests d'hypothèse sont résumées dans le tableau suivant :

Décision	Réalité	H_0 vraie	H_1 vraie
H_0 acceptée		correct	manque de puissance risque de seconde espèce β
H_1 acceptée		rejet à tort risque de première espèce α	puissance du test $1 - \beta$

On peut visualiser ces notions à l'aide du graphique ci-dessous :



CHAPITRE II

Fonction de répartition empirique

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'estimation de la loi d'une variable aléatoire ainsi qu'aux problèmes de tests associés. Pour traiter ces questions, nous allons chercher à estimer la fonction de répartition de cette variable. Nous sommes donc confrontés à un problème de statistique non-paramétrique. Pour traiter ce problème, on utilisera la notion de fonction de répartition empirique.

1. Introduction

On considère un n -échantillon (X_1, \dots, X_n) d'une variable aléatoire X . On note F la fonction de répartition de X , c'est-à-dire :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}(X_i \leq t)$$

C'est cette fonction F que nous allons chercher à estimer en introduisant la *fonction de répartition empirique*.

Définition 1. La fonction de répartition empirique associée à cet échantillon est la fonction :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow [0, 1] \\ t &\longmapsto F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{X_i \leq t\}} \end{aligned}$$

Remarque

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, la variable aléatoire $nF_n(t)$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, F(t))$.

Pour représenter la fonction F_n , on introduit la statistique d'ordre $(X_{(1)}, \dots, X_{(n)})$ associée à l'échantillon (X_1, \dots, X_n) définie par

$$\{X_{(1)}, \dots, X_{(n)}\} = \{X_1, \dots, X_n\} \quad \text{et} \quad X_{(1)} \leq \dots \leq X_{(n)}.$$

On a alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{X_{(i)} \leq t\}}$$

On en déduit le résultat suivant.

Proposition 2. La fonction F_n est une fonction en escalier, croissante, continue à droite et admettant une limite à gauche. Elle est discontinue aux points $(X_{(i)})_{1 \leq i \leq n}$ et constante sur $[X_{(i)}, X_{(i+1)}[$ pour $i \in \{1, \dots, n-1\}$.

La fonction $F_n(t)$ est un estimateur naturel de $F(t)$, comme nous allons le voir dans le résultat suivant.

Proposition 3. On a pour tout $t \in \mathbb{R}$, $F_n(t)$ est un estimateur sans biais et fortement consistant de $F(t)$. Par ailleurs, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{n}(F_n(t) - F(t)) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, F(t)(1 - F(t))).$$

DÉMONSTRATION. Le calcul de l'espérance montre que l'estimateur est sans biais. De plus, la loi forte des grands nombres appliquée aux variables aléatoires i.i.d. $1_{\{X_i \leq t\}}$ (bornées donc intégrable) tels que $\mathbb{E}[1_{\{X_i \leq t\}}] = \mathbb{P}(X_i \leq t) = F(t)$ entraîne la convergence presque sûre. Le dernier point découle du théorème central limite. \square

Dans les sections suivantes, nous allons nous intéresser non pas à la convergence ponctuelle simple de F_n vers F mais à la convergence uniforme. Notons que la discontinuité de F_n présente des inconvénients théoriques évidents dans l'optique d'estimer F . Néanmoins, comme elle est constante par morceaux, elle est simple à construire en pratique. Dans les sections suivantes, nous aurons besoin de l'outil de la *fonction inverse généralisée* :

$$\forall x \in]0, 1[, \quad F^-(x) = \inf \{t \in \mathbb{R} : F(t) \geq x\}.$$

Proposition 4. (*Ouvrard p. 29*) *La fonction inverse généralisée se confond avec l'inverse de F quand F est bijective. Elle possède les propriétés suivantes :*

- *La monotonie de F entraîne*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in]0, 1[, \quad F(t) \geq x \iff t \geq F^-(x)$$

- *Si $U \sim \mathcal{U}([0, 1])$ alors $F^-(U)$ est une variable aléatoire dont la fonction de répartition est F .*
- *Si Z est une variable aléatoire de fonction de répartition F continue alors $F(Z) \sim \mathcal{U}([0, 1])$*

2. Théorème de Glivenko-Cantelli

Le résultat de cette section renforce le théorème de la loi forte des grands nombres.

Théorème 5.

Théorème de Glivenko-Cantelli

Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de fonction de répartition F . On pose :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{X_i \leq t\}}.$$

Alors on a :

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |F_n(t) - F(t)| \rightarrow 0 \text{ p.s.}$$

DÉMONSTRATION. D'après la loi forte des grands nombres (comme dans la proposition 3), on a pour tout $t \in \mathbb{R}$ fixé, $F_n(t)(\omega) \rightarrow F(t)(\omega)$ pour presque tout ω . Il reste à voir que la convergence est uniforme en t . Si $n \geq 1$ on pose :

$$V_n = \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{X_i \leq t\}} - F(t) \right|.$$

Soit $(U_k)_k$ une suite de variable aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi $\mathcal{U}([0, 1])$. On a alors les égalités en loi suivantes :

$$V_n = \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{X_i \leq t\}} - F(t) \right| = \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{F^-(U_i) \leq t\}} - F(t) \right| = \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{U_i \leq F(t)\}} - F(t) \right|$$

Si on pose $s = F(t)$, il vient :

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{U_i \leq F(t)\}} - F(t) \right| = \sup_{s \in F(\mathbb{R})} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{U_i \leq s\}} - s \right| \leq \sup_{s \in [0, 1]} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{U_i \leq s\}} - s \right|$$

Ainsi il suffit de montrer que le théorème est vrai dans le cas particulier où les variables $X_i = (U_i)$ suivent des lois uniformes sur $[0, 1]$. Grâce à la loi des grands nombres, on sait que pour tout $s \in \mathbb{R}$, il existe un ensemble négligeable $N_s \subset \Omega$ vérifiant :

$$\forall \omega \in \Omega \setminus N_s, \quad \sum_{i=1}^n 1_{\{U_i \leq s\}} \rightarrow s.$$

Comme une réunion dénombrable d'ensembles négligeables est encore négligeable, on en déduit l'existence d'une partie négligeable $N \subset \Omega$ telle que :

$$\forall \omega \in \Omega \setminus N, \quad \forall s \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}, \quad \sum_{i=1}^n 1_{\{U_i \leq s\}} \rightarrow s.$$

En fait la croissance de $s \mapsto \sum_{i=1}^n 1_{\{U_i \leq s\}}$ fait que l'on a :

$$\forall \omega \in \Omega \setminus N, \quad \forall s \in [0, 1], \quad \sum_{i=1}^n 1_{\{U_i \leq s\}} \rightarrow s.$$

Pour chaque $\omega \in \Omega \setminus N$, $\sum_{i=1}^n 1_{\{U_i \leq s\}}$ converge donc simplement vers s sur $[0, 1]$. Le théorème de Dini nous permet alors de conclure que la convergence est uniforme. \square

3. Test de Kolmogorov

Le théorème de Glivenko-Cantelli est une généralisation de la loi forte des grands nombres au cas non-paramétrique. La généralisation du TCL est donnée par le théorème qui suit. La statistique introduite dans ce théorème nous permettra de construire un test d'ajustement à une loi (test de Kolmogorov). Dans le même esprit, nous construirons aussi un test d'homogénéité (test de Kolmogorov - Smirnov).

Proposition 6. *Soit $(X_{(1)}, \dots, X_{(n)})$ un n -échantillon issu de X . On note F la fonction de répartition de X et F_n la fonction de répartition empirique. Si F est continue alors la loi de*

$$D(F_n, F) = \sup_{t \in \mathbb{R}} |F_n(t) - F(t)|$$

ne dépend pas de F .

DÉMONSTRATION. On a, en posant $x = F(t)$,

$$\begin{aligned} D(F_n, F) &= \sup_{t \in \mathbb{R}} |F_n(t) - F(t)| = \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{X_i \leq t\}} - F(t) \right| \\ &= \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{F(X_i) \leq F(t)\}} - F(t) \right| = \sup_{x \in [0, 1]} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{U_i \leq x\}} - x \right| \end{aligned}$$

d'où le résultat. \square

Le résultat principal de cette section est le suivant.

Théorème 7.

On suppose que l'on a les mêmes hypothèses que ci-dessus. Alors la variable aléatoire $\sqrt{n}D(F_n, F)$ converge en loi, vers une loi limite qui ne dépend pas de F et dont la fonction de répartition est égale à :

$$\forall t \geq 0, \quad F_{KS}(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \exp(-2k^2 t^2)$$

On a donc, pour $\lambda > 0$,

$$\mathbb{P}(\sqrt{n}D(F_n, F) \leq \lambda) \rightarrow 1 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \exp(-2k^2 \lambda^2)$$

Ce théorème est admis.

Nous pouvons donc construire un test d'ajustement à une loi, dit *test de Kolmogorov*. On peut d'abord

remarquer que si on réordonne de manière croissante l'échantillon, $(X_{(1)}, \dots, X_{(n)})$ alors $F_n(X_{(j)}) = j/n$ et

$$D(F_n, F) = \max_{1 \leq j \leq n} \max \left(\left| \frac{j}{n} - F(X_{(j)}) \right|, \left| F(X_{(j)}) - \frac{j-1}{n} \right| \right)$$

Si on veut tester que la loi de l'échantillon a pour fonction de répartition F_0 , c'est-à-dire $H_0 : F = F_0$ contre $H_1 : F = F_1$, on commence par réordonner l'échantillon. Puis on calcule $D(F_n, F)$, en remarquant que sous H_0 , on a $D(F_n, F) = D(F_n, F_0)$. Puis on cherche (dans une table) le quantile $k_{1-\alpha}$ de la loi de Kolmogorov. On accepte alors H_0 si $D(F_n, F_0) < D(F_n, F_0)$. Ce test est asymptotiquement de niveau α et sa puissance tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$.

4. Test de Kolmogorov-Smirnov

Dans le même esprit, nous allons construire un test d'homogénéité. On observe deux échantillons de taille respective n et m , (X_1, \dots, X_n) et (Y_1, \dots, Y_m) . On veut tester si les deux échantillons sont issus d'une même loi (éventuellement inconnue). On note F la fonction de répartition de chacune des variables X_i et G la fonction de répartition de chacune des variables Y_i . On veut tester $H_0 : F = G$ contre $H_1 : F \neq G$. Pour cela, on introduit :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{X_i \leq t\}} \quad \text{et} \quad G_m(t) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m 1_{\{Y_i \leq t\}}$$

et on pose

$$D_{m,n} = \sup_{t \in \mathbb{R}} |F_n(t) - G_m(t)|.$$

On a le résultat suivant.

Théorème 8.

Avec les hypothèses données ci-dessus on a, sous " $H_0 : F = G$ " :

$$\mathbb{P}\left(\sqrt{\frac{nm}{n+m}} D_{m,n} \leq \lambda\right) \rightarrow 1 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \exp(-2k^2 \lambda^2)$$

Ceci permet alors de construire un test sur le même modèle que ci-dessus.

Index

fonction de répartition empirique, 9
fonction inverse généralisée, 10

hypothèse alternative, 6
hypothèse nulle, 6

niveau de signification, 6

puissance d'un test, 8

risque d'erreur de première espèce, 7
risque d'erreur de seconde espèce, 7

statistique, 6

test bilatéral, 6
test bilatérale, 6
test d'ajustement ou d'adéquation, 5
test d'homogénéité ou de comparaison, 5
test d'hypothèse, 5
test d'indépendance ou d'association, 5
test de conformité, 5
test de Kolmogorov, 11
test unilatéral, 6
test unilatérale, 6
tests non paramétriques, 5
tests paramétriques, 5
Théorème de Glivenko-Cantelli, 10