Probabilités-Statistiques TP 3
Illustration numérique de convergence p.s.

Rappel : taper `vnc://nom_du_serveur` dans un terminal.
Les sujets et les corrigés des TPs sont mis le lendemain des séances sur ma page :
http://www.math.u-bordeaux1.fr/~chabanol/TP_agreg.html
Pour illustrer une convergence en loi $X_n \to X$, on a vu qu'on peut fixer n_0 grand et "illustrer" que X_{n_0} et X ont à peu près même loi, par exemple à l'aide d'un échantillon de X_{n_0}.
Pour illustrer une convergence p.s. $X_n \to X$, on fait comme pour illustrer la convergence d'une suite (u_n) : on génère une instance de la suite $(X_1, \dots, X_{n_0})$ (avec n_0 grand) (une instance de cette suite correspond à "un choix" de ω) , on trace X_n en fonction de n et on montre que "la courbe semble avoir une asymptote horizontale".
Si la limite X est connue et constante, on a fini (et on aurait pu se contenter de prendre n_0 grand fixé, faire afficher X_{n_0} et constater qu'on était proche de la valeur limite).
Si la limite X est aléatoire, la limite observée avec l'asymptote horizontale sera différente si on recommence avec une autre instance de la suite. Pour avoir alors une idée de la loi de la limite X, il faudrait faire... comme avec la convergence en loi; et par exemple obtenir un échantillon de X_{n_0}.

1. Convergence presque sûre vers une constante

(1) Soit (X_n) une suite de v.a. indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose pour tout entier n $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$.
   (a) *Examiner le sens de variation de la suite M_n et justifier que M_n converge p.s.*
   (b) *Générer un échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ et obtenir le vecteur $(M_1, \dots, M_n)$ correspondant. Il est important que tout le vecteur $(M_1, \dots, M_n)$ soit obtenu à partir du même échantillon $(X_1, \dots, X_n)$. Illustrer la convergence précédente en traçant M_n en fonction de n; recommencer l'expérience avec un autre échantillon; la limite semble-t-elle aléatoire ? Devinez-la (si ce n'est pas déjà fait...) et prouvez le.*

2. Illustration de la loi des grands nombres

Rappel : d'après la loi forte des grands nombres, si $(X_n)_{n\in N}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes intégrables, de même loi, d'espérance m, alors pour presque tout ω, $\frac{\sum_{i=1}^n X_i(\omega)}{n}$ converge vers m : la moyenne arithmétique converge vers l'espérance.

On va par exemple travailler avec une variable aléatoire X de loi uniforme sur $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (on va simuler un lancer de dés).

(2) *Quelle est l'espérance m de X ?*

(3) *Générer un échantillon de X de taille* 5000*; obtenir un vecteur avec les valeurs successives des $\sum_{i=1}^n X_i$ pour n allant de 1 à 5000 (penser à `cumsum`), puis obtenir un vecteur avec les valeurs successives des $\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ pour n allant de 1 à 5000.*

(4) *Représenter sur un même graphe les $\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ en fonction de n, ainsi qu'une droite horizontale correspondant à l'espérance. A t-on illustré quelque chose ?*

(5) *Tracer $n^{0.1}(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - m)$ en fonction de n. Quelle semble être sa limite ? Tracer également $n(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - m)$ en fonction de n. Quel est son comportement ? Tracer maintenant $\sqrt{n}(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - m)$ en fonction de n : il n'y a pas de convergence p.s., mais on n'observe pas non plus de valeurs extrêmement élevées : on voit le rôle du $\sqrt{n}$ présent dans le théorème central limite.*

(6) *Question subsidiaire. Refaire les questions 2 et 5 avec une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur* $[0, 1]$.

(7) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Cauchy de densité $\frac{1}{\pi(1+x^2)}$. Peut-on appliquer la loi forte des grands nombres à cette suite ?

(a) *Numériquement, observez-vous une convergence presque sûre de* $M_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ *?*

(b) *On admettra que la fonction caractéristique de* X_1 *est* $E[\exp(itX_1)] = \exp(-|t|)$ *(le calcul se fait par les résidus). En déduire la fonction caractéristique de* M_n *et identifier sa loi*

(c) *Illustrer le résultat précédent*

3. Convergence presque sûre mais pas vers une constante

(8) *Générer un 30-échantillon* E *de loi de Bernoulli de paramètre* 0.5.

(9) *Obtenir un vecteur contenant les* $\sum_{i=1}^n \frac{E_i}{2^i}$*, pour* n *allant de 1 à 30.*

(10) *La suite* $u_n = \sum_{i=1}^n \frac{E_i}{2^i}$ *vous semble-t-elle converger ? Vers quelle valeur ?*

(11) *Refaites l'expérience avec un autre échantillon* : on observe encore une convergence (il y a encore convergence p.s.), mais la limite est différente : elle est aléatoire.

(12) Pour observer la loi de cette valeur limite, on va en fait... illustrer la convergence en loi. *Fixer* n_0 *grand, générer un échantillon de* (u_{n_0}) *et deviner la loi limite.*

(13) *Question subsidiaire, que vous pouvez regarder chez vous. Prouver la convergence p.s., puis démontrer le résultat deviné précédent.*

(14) *Question subsidiaire. Mêmes questions si* E *ne suit pas une loi de Bernoulli mais une loi uniforme sur* $\{-1, 1\}$.

(15) *Question subsidiaire. Mêmes questions sur scilab avec la série* $\sum_n \frac{A_n}{3^n}$ *où les* A_n *sont i.i.d de loi uniforme sur* $\{0, 2\}$ *: on peut montrer qu'elle converge en loi vers une loi dont le support est l'ensemble de Cantor; on peut considérer qu'il s'agit d'une loi uniforme sur l'ensemble de Cantor.*

4. Polya

Une urne contient initialement r boules rouges et b boules bleues. Une opération consiste à tirer une boule au hasard dans l'urne, regarder sa couleur, et la remettre avec une boule de la même couleur dans l'urne (donc à chaque opération le nombre de boules est augmenté de 1). On note R_n le nombre de boules rouges après la n-ième opération, X_n la proportion de boules rouges au bout de n opérations et Y_n la proportion de boules bleues.
On a donc $R_0 = r$, $X_0 = \frac{r}{r+b}$, $X_n = \frac{R_n}{r+b+n}$.

(16) Expliquer pourquoi si $k \geq r$ $P(R_{n+1} = k+1 | R_n = k) = \frac{k}{r+b+n}$.
Que vaut $P(R_{n+1} = k | R_n = k)$?

(17) *C*ompléter la fonction ci-dessous pour qu'en lui donnant en paramètre r, b, n et le nombre "Rouge" de boules rouges à l'instant n elle simule une opération, et fournisse le nombre de boules rouges à l'instant $n+1$:

```
function res=Urne(Rouge,n,r,b)
U=rand(1);
res=Rouge+(U<...);
endfunction;
```

(18) *S*imuler la suite (X_n). Observez-vous numériquement une convergence presque sûre de X_n, de Y_n et de $\frac{X_n}{Y_n}$? (vous pouvez essayer plusieurs valeurs de r et b). Si oui, la limite de X_n est-elle aléatoire ou déterministe ?

(19) *P*ouvez-vous deviner la loi limite de X_n dans le cas $r = b = 1$? Pour le prouver, on peut dans le cas $r = b = 1$ montrer par récurrence que R_n suit une loi uniforme sur $\{1, \ldots, n\}$, en déduire la fonction caractéristique de X_n puis sa limite.