T.P. II : Estimation

Exercice 1.

On considère l'estimateur de la variance, lorsque m est inconnu,

$$\overline{S_n^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X_n})^2.$$

1. Déterminer analytiquement le biais.

2. On suppose que X suit une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

Evaluer le biais par la méthode de Monte-Carlo, c'est-à-dire

a) Simuler B n-échantillon de X. Déterminer à chaque fois $\overline{S_n^2}$.

b) Calculer une estimation du biais $\mathbb{E}[\overline{S_n^2}] - \sigma^2$ par

$$\frac{1}{B}\sum_{l=1}^{B} S_n^2(l) - \sigma^2.$$

On tracera les variations de cette approximation en fonction du nombre d'itérations B (ajouter sur ce graphique la valeur du biais obtenu à la question 1).

3. Simuler un 100-échantillon de X et le stocker dans XX. On suppose que l'on ne connait pas la loi de X. On procède alors à l'aide de la méthode du bootstrap.

a) Calculer $\widehat{\sigma^2}$ à partir de XX.

b) Pour $l = 1 \dots B$, simuler un 100-échantillon sous la loi $\widehat{F_n}$, i.e. on tire au hasard avec remise 100 variables aléatoires dans XX.

c) Déterminer à chaque fois $\overline{S_n^2(l)}$.

d) Calculer une estimation du biais par

$$\frac{1}{B}\sum_{l=1}^{B} S_n^2(l) - \widehat{\sigma^2}.$$

Comme avant, on tracera les variations de cette approximation en fonction du nombre d'itérations B, en ajoutant sur ce graphique la valeur du biais obtenu à la question 1.

Exercice 2. On s'intéresse à l'espérance μ d'un échantillon d'une loi normale.

1. Simuler un n-échantillon $(X_1,\dots,X_n)$, pour $n = 10$, de la loi normale $\mathcal{N}(5,2)$. On suppose désormais μ et σ^2 inconnus.

2. Calculer un intervalle de confiance à 95% pour μ à l'aide de la loi de Student : sous l'hypothèse de normalité, σ^2 inconnu, alors

$$\widehat{S_n^2} = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X_n})^2.$$

est un estimateur de la variance et

$$\frac{\overline{X_n} - \mu}{\sqrt{\widehat{S_n^2}/n}} \sim \mathcal{T}(n-1)$$

3. Déterminer un intervalle de confiance asymptotique à 95% pour μ à l'aide du théorème central limite, qui affirme que

$$\frac{\overline{X_n} - \mu}{\sqrt{\widehat{S_n^2}/n}}$$

converge en loi vers $\mathcal{N}(0,1)$.

4. Déterminer un intervalle de confiance asymptotique à 95% pour μ à l'aide de la méthode des percentiles Bootstrap :

a) Simuler B n-échantillon sous la loi $\widehat{F_n}$. Déterminer à chaque fois $\widehat{\mu} = \overline{X_n}$.

b) Les valeurs $\widehat{\mu}(l)$ fournissent une approximation de la fonction de répartition de $\widehat{\mu}$. On détermine alors l'intervalle de confiance.