

TP Probabilités-Statistiques 2. Illustration numérique de convergences en loi

Rappel : taper `krdc vnc://nom_du_serveur` dans un terminal.

Les sujets et les corrigés des TPs sont mis le lendemain des séances sur ma page :

http://www.math.u-bordeaux1.fr/~chabanol/TP_agreg.html

Pour illustrer une convergence en loi $X_n \rightarrow X$, il peut y avoir plusieurs solutions :

- Si X_n et X sont discrètes et qu'on connaît explicitement les lois de X_n et de X , on peut comparer la loi de X_n pour n "grand" et la loi de X (utiliser `stem`)
- Si on connaît explicitement les fonctions de répartition de X_n et X , on peut prendre n "grand" et tracer les deux fonctions.
- Si on sait simuler X_n , on peut aussi utiliser le théorème de Glivenko-Cantelli : on simule un assez gros échantillon de X_n avec n assez grand et on trace sa fonction de répartition empirique, qu'on compare avec la fonction de répartition de X .
On peut aussi éventuellement passer par un histogramme.
- Enfin si on ne connaît pas la loi limite, on peut prendre 2 valeurs n_1 et n_2 grandes et illustrer le fait que X_{n_1} et X_{n_2} ont "à peu près" la même loi (par exemple à l'aide de fonctions de répartition empiriques).

1. APPROXIMATIONS DE LA LOI BINOMIALE

1.1. Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson. Lorsqu'on a une binomiale, pour de grandes valeurs de n , le calcul de $\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ devient vite pratiquement impossible, sauf si l'on cherche à calculer le logarithme de cette expression au lieu de l'expression elle-même (et à condition d'utiliser l'approximation des factorielles par la formule de Stirling). Il y a en pratique deux cas limites. Le premier cas est le suivant.

Lorsque n tend vers l'infini et que p tend vers 0 avec $np = \lambda$, la loi binomiale converge vers une loi de Poisson de paramètre λ . En pratique, on remplace la loi binomiale par une loi de Poisson dès que $n > 30$ et $np < 5$ ou dès que $n > 50$ et $p < 0.1$.

1. *Comment démontre-t-on cette convergence en loi ?*
2. *Illustrer cette convergence. En particulier illustrer les valeurs utilisées "en pratique" : examiner ce qu'il se passe si n est trop petit, ou si p est trop grand.*

1.2. Approximation d'une loi binomiale par une loi normale. Le deuxième cas limite avec les binomiales est donné par le théorème de Moivre-Laplace : si $0 < p < 1$ est un réel fixé et si (S_n) est une suite de v.a. telle que S_n suit une loi binomiale de paramètres (n, p) , $Z_n = \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ converge en loi vers une loi normale centrée réduite.

En pratique pour calculer $P(a \leq Z_n \leq b)$ on remplace Z_n par une v.a. normale centrée réduite dès que $n > 30$, $np > 5$ et $n(1-p) > 5$.

3. *Illustrer cette convergence en loi. En particulier illustrer les valeurs utilisées "en pratique" : examiner ce qu'il se passe si n est trop petit, ou si p est trop grand ou trop petit.*

2. D'AUTRES CONVERGENCES EN LOI

- (1) Si (X_n) sont une suite de v.a. indépendantes identiquement distribuées de loi exponentielle de paramètre α , $Y_n = \alpha \max_{1 \leq i \leq n} X_i - \ln(n)$ converge en loi vers une loi de fonction de répartition $e^{-e^{-x}}$.

4. *Démontrer ce résultat.*

5. *Illustrer numériquement ce résultat*

- (2) Si (X_n) sont une suite de v.a. indépendantes identiquement distribuées de loi uniforme sur $[0, 1]$, $n \min_{1 \leq i \leq n} X_i$ converge en loi vers une loi exponentielle de paramètre 1.

6. *Démontrer ce résultat*

7. *Illustrer numériquement ce résultat*

3. LE THÉORÈME CENTRAL LIMITE

D'après le théorème central limite, si (X_n) est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi et d'espérance μ et de variance σ^2 finies, $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)/\sigma$ converge en loi vers une loi normale centrée réduite (on a noté $\bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$). Cette quantité reste donc aléatoire, mais on sait comment elle est distribuée asymptotiquement.

8. *Illustrer le théorème central limite dans le cas où les X_i suivent une loi uniforme sur $[0, 1]$.*

9. *Illustrer le théorème central limite dans le cas où chaque X_i sont le résultat d'un lancer de dé et suit donc une loi uniforme sur $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.*

(Question subsidiaire). Dans le cas où les X_i suivent une loi de Pareto de paramètre $\alpha \in]1, 2[$, les X_i sont intégrables d'espérance $\frac{\alpha-1}{\alpha}$ mais pas L^2 .

10. *Illustrer le fait que dans ce cas il n'y a pas convergence en loi de $\sqrt{n}(\bar{X}_n - E[X_1])$.*

4. CONVERGENCE EN LOI D'UNE CHAÎNE DE MARKOV

On peut aussi observer la convergence en loi de bien d'autres processus. Voici ci-dessous un exemple de chaîne de Markov.

Soient d balles ($d > 1$) numérotées de 1 à d et réparties dans deux urnes A et B . A chaque instant, on tire un nombre i uniformément entre 1 et d , et avec probabilité $\frac{d}{d+1}$ la balle numéro i change d'urne. Avec probabilité $\frac{1}{d}$ rien ne se passe.

Soit X_n le nombre de balles dans l'urne A après n tirages indépendants. La fonction ci-dessous prend le nombre de balles X_{n-1} dans A avant l'étape n et simule le nombre de balles X_n dans A avant l'étape $n + 1$.

```

fonction Y = Ehrenfest(d, X )
U=rand(1);
if (U<d/(d+1))
V=rand(1);
Y=X +(V>(X/d))-(V<(X/d));
else Y=X;
end
end

```

11. *Comprendre pourquoi la fonction ci-dessus génère bien ce qu'on veut.*

Pour $d = 5$, générer un 5000 échantillon de la chaîne à l'instant 900 et à l'instant 1000 et mettre en évidence une convergence en loi.

La théorie des chaînes de Markov prédit une convergence en loi vers la loi invariante qui est ici $\text{Bin}(d, \frac{1}{2})$. Est-ce cohérent avec vos observations ?