

# Math en Jeans

## Année 2013-2014

### Problème 1. Jeux de pierres

La version de base de ce jeu se joue sur un damier rectangulaire où sont disposées alternativement des pierres blanches et noires. À tour de rôle, chaque joueur (qui possède sa propre couleur de pierre) doit déplacer une pierre de sa couleur sur une case voisine (horizontalement ou verticalement) contenant une pierre adverse en détruisant cette dernière. Le premier joueur qui ne peut plus se déplacer perd la partie.

Il existe aussi une version solitaire de ce jeu, dans laquelle l'unique joueur alterne les coups blancs et noir en essayant d'éliminer le maximum de pierres (l'idéal étant de n'en laisser qu'une...).

●	○	●	○	●	○	●
○	●	○	●	○	●	○
●	○	●	○	●	○	●
○	●	○	●	○	●	○
●	○	●	○	●	○	●
○	●	○	●	○	●	○
●	○	●	○	●	○	●

Intéressons-nous tout d'abord, en guise d'échauffement, à une autre version solitaire de ce jeu, dans laquelle le joueur n'est plus obligé d'alterner les coups blancs et les coups noirs (la seule contrainte est donc de déplacer une pierre d'une couleur quelconque sur une pierre voisine de couleur opposée). De plus, nous allons jouer à ce jeu simplement sur une « ligne », et non sur un damier. Nous nous intéressons ici à la meilleure façon de jouer (c'est-à-dire celle laissant à la fin le minimum de pierres) pour une disposition initiale des pierres quelconque (pas seulement « alternée »).

- Sauriez-vous déterminer les dispositions initiales qui permettent de ne laisser qu'une seule pierre en fin de jeu ?

Et maintenant la version qui va nous occuper... Toujours le même principe mais, cette fois, avec trois couleurs de pierres : blanches, noires et grises... Un déplacement consiste en la prise d'une pierre d'une autre couleur que la sienne.

- Sauriez-vous déterminer les dispositions initiales de ce jeu qui permettent de ne laisser qu'une seule pierre en fin de jeu (toujours sur une ligne) ?

Après avoir résolu (en totalité ou en partie) le jeu sur une ligne, on peut chercher à déterminer les dispositions initiales qui permettent de ne laisser en fin de partie que deux, trois, ou k pierres (et pas moins !), ou encore considérer le jeu sur un cercle, ou sur un damier à m lignes et n colonnes (en commençant pour simplifier par un damier ne comportant que deux lignes)... Remarquons aussi que nous pouvons désormais considérer le cas des prises « en diagonale », ce qui génère un nouveau problème à étudier ☺.

### Problème 2. Le jeu du XXX

***Ce problème, qui comporte de multiples questions, pourra être réparti entre plusieurs groupes...***

On s'intéresse à un jeu à deux joueurs, où les joueurs jouent chacun leur tour. Le premier joueur qui ne pourra pas jouer sera déclaré *perdant*.

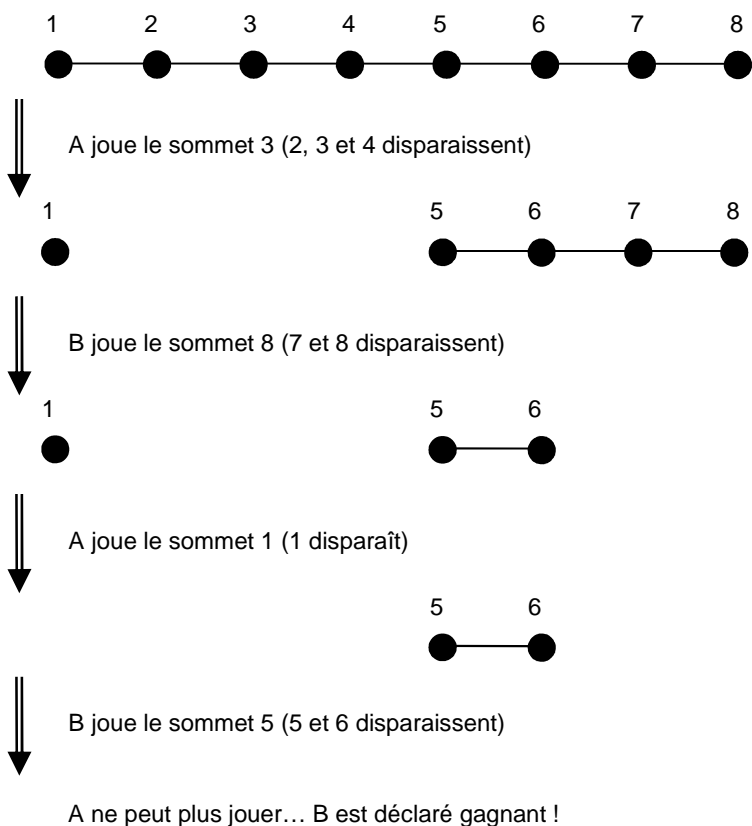
Ce jeu se joue sur une *chaîne* à n *sommets* (par exemple 8 sommets), que l'on peut représenter ainsi :



Nous dirons que deux sommets sont *voisins* s'ils sont reliés par un trait (appelé *arête*). Dans notre exemple, les sommets 3 et 4 sont voisins, de même que les sommets 6 et 7. Par contre, les sommets 1 et 3, ou 4 et 8, ne sont pas voisins.

Pour jouer, un joueur choisit un sommet puis le supprime, en supprimant également tous ses voisins. Lorsqu'un joueur supprime le (ou les) dernier(s) sommet(s), il gagne la partie (en effet, son adversaire ne pouvant plus jouer, il sera déclaré perdant).

Voici un exemple de partie (les joueurs sont notés A et B) :



Pensez-vous que A aurait pu gagner (en jouant différemment) ?

On appellera *configuration* une situation de jeu. Dans l'exemple précédent, nous avons une configuration *initiale* (la chaîne à 8 sommets), puis une deuxième configuration composée d'une chaîne à 1 sommet et d'une chaîne à 4 sommets, puis etc.

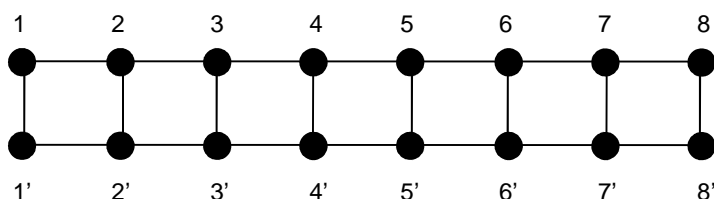
On dira qu'une configuration est *gagnante* si le joueur qui doit jouer peut gagner quoi que fasse son adversaire. À l'inverse, une configuration est *perdante* si, quoi que fasse le premier joueur, le second peut gagner.

Notre problème général peut alors s'énoncer ainsi :

- peut-on déterminer si une configuration est gagnante ou perdante ?
- dans le cas où une configuration est gagnante, quelle stratégie doit adopter le premier joueur pour gagner ?

Voici maintenant quelques questions inspirées de ce jeu, avec parfois quelques variantes...

- **Baptême.** Quel nom proposeriez-vous pour ce jeu ?
- **Le jeu sur les chaînes.** Sauriez-vous dire si une chaîne de longueur  $n$  est gagnante ou perdante (en fonction de  $n$  naturellement) ? Sauriez-vous proposer une stratégie pour les chaînes gagnantes ?  
*On pourra naturellement commencer par observer ce qui se passe pour de « petites » valeurs de  $n$ ...*
- **Le jeu sur les échelles.** On appelle échelle à  $n$  barreaux le dessin suivant (échelle à 8 barreaux) :



Attention, les règles de voisinage on changé : par exemple, le sommet 2 a maintenant 3 voisins, 1, 3 et 2'...

Sauriez-vous dire si une échelle à  $n$  barreaux est gagnante ou perdante (toujours en fonction de  $n$ ) ? Sauriez-vous proposer une stratégie pour les échelles gagnantes ?

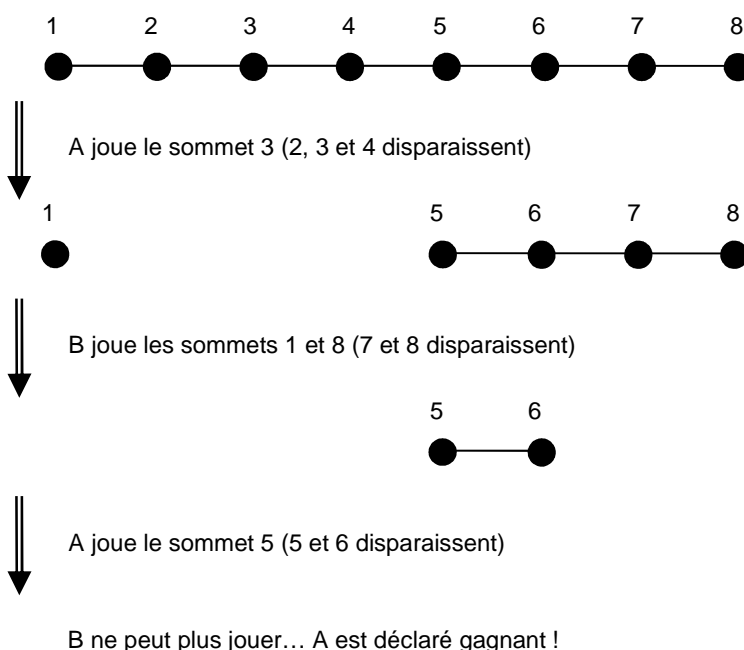
*On pourra naturellement commencer par observer ce qui se passe pour de « petites » valeurs de  $n$ . Bizarrement, il est possible que le jeu sur les échelles soit « plus simple » que sur les chaînes...*

- **La version « Qui perd gagne ».** Changeons légèrement la règle (mais avec quelles conséquences ?...) : dorénavant, le premier joueur qui ne peut plus jouer est déclaré gagnant !

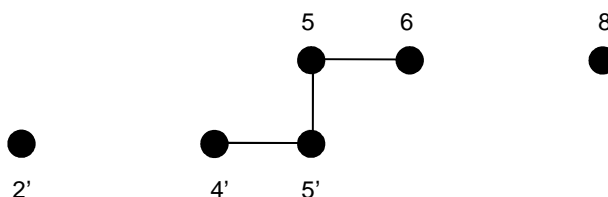
Que peut-on dire maintenant dans le cas des chaînes ? dans le cas des échelles ?

*Encore une fois, on pourra commencer par observer ce qui se passe pour de « petites » valeurs de  $n$ ... Attention ! Ne croyez pas qu'une configuration perdante en situation normale devient gagnante en « qui perd gagne » : en effet, l'adversaire ne joue plus de la même façon... puisqu'il cherche lui aussi à perdre.*

- **La version « Quick ».** Pour jouer plus vite, on propose la modification suivante : lorsqu'une configuration est composée de plusieurs « morceaux séparés » (on dira plusieurs composantes), alors le joueur doit jouer un coup dans chaque composante. Notre exemple de partie pourrait alors devenir :



Autre exemple... Dans le cas de l'échelle à huit barreaux, si A joue le sommet 3, puis B les sommets 1 et 7', nous obtenons la configuration à trois composantes suivante :



Que peut-on dire maintenant dans le cas des chaînes ? dans le cas des échelles ?

- **La version « gros bras ».** Encore une modification... Nous sommes tellement aguerris maintenant (prétentieux ?), que nous offrons à notre adversaire la possibilité de jouer deux coups de suite (A joue 1 coup, B joue 2 coups, A joue 1 coup, B joue deux coups, etc.) !

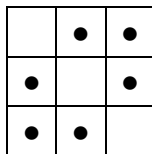
Nous avons maintenant deux types de configurations gagnantes (ou perdantes) : celles qui sont gagnantes pour A (le premier joueur ne joue qu'un coup), et celles qui sont gagnantes pour B (le premier joueur joue deux coups).

Que peut-on dire maintenant dans le cas des chaînes ? dans le cas des échelles ?

- On peut naturellement « combiner » les changements proposés. Par exemple, que donne la version « qui perd gagne » en « quick » ?
- Et bien sûr, rien n'interdit de se poser soi-même un nouveau problème !...

### Problème 3. Jamais trois sur la même ligne

On cherche à placer des jetons sur un damier  $m \times n$  ( $m$  lignes,  $n$  colonnes), de façon telle que nous n'avons jamais trois pions alignés, verticalement, horizontalement, ou en diagonale. Voici par exemple un placement correct de 6 pions sur le damier  $3 \times 3$  :

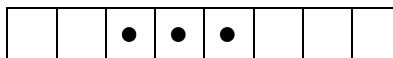


La question naturelle que l'on peut se poser est alors la suivante :

- Quel est le nombre maximum de pions que l'on peut placer sur un damier  $m \times n$  ?

Notons que l'on doit définir précisément ce que l'on entend par « alignés » :

alignés consécutivement ?



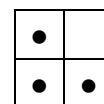
ou pas nécessairement ?



Nous obtenons ainsi deux problèmes différents, sauf pour le damier  $3 \times 3$ .

On pourra considérer dans un premier temps des damiers particuliers ( $m = 1$ ,  $m = 2$ , etc., ou encore  $m = n$ ) avant d'essayer d'en déduire des résultats généraux.

On pourrait également considérer d'autres contraintes de placement : jamais deux, jamais quatre, etc. au lieu de jamais trois ; ou encore ne pas considérer les alignements en diagonale... voire d'autres motifs tels que, par exemple, le motif ci-contre...



### Problème 4. Jamais trois sur la même ligne, version à deux joueurs

Nous considérons cette fois la version à deux joueurs du problème précédent : à tour de rôle, chaque joueur place un pion sur le damier, le premier joueur créant un alignement de trois pions perdant la partie...

La question naturelle que l'on peut se poser est alors la suivante :

- Pour des valeurs de  $m$  et  $n$  données, l'un des deux joueurs a-t-il une stratégie gagnante ? si oui laquelle ?

On pourra naturellement considérer les variations évoquées précédemment... Mais la variation suivante mérite certainement d'être considérée :

- au lieu de jouer sur un seul damier, jouons, par exemple, sur deux damiers  $3 \times 3$  (voire plus),
- à tour de rôle, chaque joueur pose un pion sur l'un des damiers, au choix,
- dès qu'un joueur réalise un alignement sur l'un des damiers, il perd la partie.

Là encore, on pourra faire varier la taille des damiers...

**Bon courage à toutes et tous...**

**Éric SOPENA**  
Chercheur au LaBRI, [sopena@labri.fr](mailto:sopena@labri.fr)