Probabilités-Statistiques TP 3
Mises en évidence de convergences diverses

Rappel : taper `krdc vnc://nom_du_serveur` dans un terminal.
Les sujets et les corrigés des TPs sont mis le lendemain des séances sur ma page :
http://www.math.u-bordeaux1.fr/~chabanol/stat.html

1. Exemple de chaîne de Markov

(1) Voici ci-dessous un exemple de chaîne de Markov.
Soient d balles ($d > 1$) numérotées de 1 à d et réparties dans deux urnes A et B. A chaque instant, on tire un nombre i uniformément entre 1 et d, et avec probabilité $\frac{d}{d+1}$ la balle numéro i change d'urne (avec probabilité $\frac{1}{d+1}$ rien ne se passe). Soit X_n le nombre de balles dans l'urne A après n tirages indépendants. La fonction ci-dessous prend le nombre de balles X_{n-1} dans A avant le n-ième tirage et simule le nombre de balles X_n dans A après le n-ième tirage.

```
   function Y = Ehrenfest(d, X )
U=rand(1);
if (U<d/(d+1))
V=rand(1);
Y=X +(V>(X/d))-(V<(X/d));
else Y=X;
end
end
```

Comprendre pourquoi la fonction ci-dessus génère bien ce qu'on veut.
Pour $d = 5$, simuler une trajectoire de la chaîne $X_1, \dots, X_{500}$ (en choisissant X_0 comme vous voulez).
Pour $d = 5$, fénérer un 5000 échantillon de la chaîne à l'instant 900 et à l'instant 1000 et mettre en évidence une convergence en loi.
La théorie des chaînes de Markov prédit une convergence en loi vers la loi invariante qui est ici $Bin(d, \frac{1}{2})$. Est-ce cohérent avec vos observations ?

2. Processus de Poisson

(2) Soient $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ des variables indépendantes de même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ (on peut penser que X_n est l'intervalle de temps séparant l'arrivée de deux clients consécutifs à un guichet). Soit $T_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ le temps d'arrivée du $n$ème client et $N_t = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{1}_{\{T_n \le t\}}$ le nombre de clients arrivés avant l'instant t.

On a montré dans un TD précédent que $\frac{N_t}{t} \to \lambda$ presque sûrement quand $t \to +\infty$, et que $\sqrt{t}\big(\frac{N_t}{t} - \lambda\big)$ converge en loi vers $N(0, \lambda)$ quand $t \to +\infty$.
Simuler une trajectoire ($X_1, \dots, X_{500}$ et tracer N_t en fonction de t. Mettre en évidence ces convergences pour $\lambda = 1$

(3) *Question subsidiaire. La convergence en loi ci-dessus permettent d'obtenir un intervalle de confiance asymptotique pour λ. Le déterminer, et l'observer numériquement.*

3. Minimum de lois uniformes

Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$. On note $m_n = \min_{1\le i\le n} X_i$. On peut montrer que m_n converge presque sûrement vers 0, et que nm_n converge en loi vers une loi exponentielle de paramètre 1.

(4) *Illustrer numériquement les convergences démontrées ci-dessus.*

4. Simulation d'une file d'attente à temps discret

On va modéliser une file d'attente en supposant que les événements (arrivée ou départ d'un client) ne peuvent se produire qu'à des instants entiers.
On note X_n le nombre de clients en attente ou en train d'être servis à l'instant n. Entre les instants n et $n+1$ arrivent Y_{n+1} clients, et si $X_n \neq 0$, repartent Z_{n+1} clients (si $X_n = 0$, il repart 0 client, évidemment). On suppose que $X_0, Y_1, Z_1, Y_2, Z_2 \ldots$ sont indépendantes, que les Y_i sont indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p et les Z_i indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre q.

(a) *Ecrire X_{n+1} en fonction de X_n, de Y_{n+1} et de Z_{n+1}.*

(b) *Ecrire une fonction qui si on lui donne X_n en paramètre, simule X_{n+1}.*
Simuler ainsi une trajectoire de X_n et tracer les $(X_1, \ldots, X_n, \ldots X_{1000})$ en fonction de n. Prendre plusieurs valeurs de p et q et mettre en évidence des comportements différents suivant si $p < q$, $p = q$ ou $q < p$.

(c) (X_n) est un cas particulier de chaîne de Markov irréductible apériodique à espace d'états infini. Si $p < q$, on admettra qu'elle admet une loi de probabilité invariante π donnée par :

$$\pi(0) = 1 - \frac{p}{q}; \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \pi(k) = (\frac{1}{1-q})(1-\frac{p}{q})(\frac{p}{q})^k(\frac{1-q}{1-p})^k$$

(i) *Question subsidiaire* Vérifier que π définit bien une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$.

(ii) On dit que la chaîne est ergodique si pour pour tout entier m, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 1_{X_k=m}$ converge presque sûrement quand n tend vers l'infini, et que cette limite est $\pi(m)$.
Tester pour différentes valeurs de p et q si la chaîne vous semble ergodique.

(iii) *Simuler plusieurs (au moins 2000) trajectoires de X_n pour $1 \le n \le 500$; tracer les fonctions de répartition empiriques de X_{10}, X_{20}, X_{50}, X_{150}, X_{500} pour différentes valeurs de p et q ainsi que et dans le cas $p < q$ comparer avec la fonction de répartition de π. Observe-t-on une convergence en loi de X_n ?*