# Liste d'exercices n$^o$ 2
(courbure des arcs, centre de courbure)

**N.B.** : Dans toute la feuille, $\mathbf{E}^n$ désigne l'espace euclidien de dimension $n \geq 2$, muni de sa base naturelle et orienté par cette base.

**Exercice 1** *(expressions de la courbure)*

Soit $f : I \to \mathbf{E}^n$ un arc régulier de classe $\mathcal{C}^2$. Une origine et une orientation étant choisies, on note $s = \varphi(t)$ la longueur d'arc de $f$ et on pose $\gamma = f \circ \varphi^{-1}$.

**1-a.** Exprimer $f'$ et $f$" en fonction de $\gamma'$, $\gamma$", $\varphi'$ et $\varphi$".

**1-b.** En déduire que la courbure de l'arc $f$ au point $f(t)$ $(t \in I)$ est donnée par

$$k(t)^2 = ||f'(t)||^{-6} \left[||f'(t)||^2||f''(t)||^2 - \langle f'(t), f''(t)\rangle^2\right].$$

**1-c.** Déterminer la courbure d'une hélice de $\mathbf{E}^3$.

**2.** Dans cette question $n = 2$.

**2-a.** Vérifier que la courbure est aussi donnée par

$$k(t) = ||f'(t)||^{-3}|\det(f'(t), f''(t))|.$$

**2-b.** Application numérique : $f(t) = R(t + i - ie^{-it})$, $I = ]0, 2\pi[$ (quelle est cette courbe ?).

**2-c.** Déterminer la courbure d'une ellipse et donner ses extréma.

**2-d.** Exprimer la courbure d'un arc régulier donné sous forme polaire par $\rho = \varphi(\theta)$.

**2-e.** Déterminer la courbure de la cardioïde $\rho = a(1 + \cos(\theta))$.

**Exercice 2** *(expressions de la courbure, suite)*

**1.** Soit $I$ un intervalle de $\mathbf{R}$ et soit $\varphi : I \to \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Exprimer la courbure du graphe de $\varphi$.

**2.** Soit $U$ un ouvert de $E^2$ et soit $F : U \to \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que $\nabla F = (F'_x, F'_y)$ ne s'annule pas sur $U$.

**2-a.** Montrer que l'ensemble $C = \{(x, y) \in U; F(x, y) = 0\}$ est localement l'image d'un arc régulier.

**2-b.** Vérifier que la courbure de $C$ vaut $|\operatorname{Div}(\nabla F/||\nabla F||)|$.

**2-c.** Exprimer la courbure de la conique $x^2/a^2 + \epsilon y^2/b^2 - 1 = 0$ $(a, b > 0,\ \epsilon = \pm 1)$.

**Exercice 3**

**1.** Montrer qu'un arc régulier de $\mathbf{E}^n$ à courbure nulle est porté par une droite.

**2.** Prouver qu'un arc régulier de $\mathbf{E}^2$ est à courbure constante si et seulement si c'est un arc de cercle ou de droite.

**3.** Reconsidérer la question précédente dans $\mathbf{E}^3$.

**Exercice 4**

Soit $\mathcal{P}$ une parabole du plan euclidien et soit $\mathcal{D}$ sa directrice.

**1.** Pour tout $M \in \mathcal{P}$, on note $P$ le point d'intersection de $\mathcal{D}$ avec la normale à $\mathcal{P}$ en $M$. Exprimer le rayon de courbure de $\mathcal{P}$ en $M$ en fonction de $MP$.

**2.** Décrire le lieu des centres de courbure de $\mathcal{P}$. Faire un dessin.

**Exercice 5**

On considère la famille $(\mathcal{C}_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{R}}$ de coniques de $\mathbf{E}^2$ définies par $x^2 + 2\lambda xy - y^2 - x = 0$ $(\lambda \in \mathbf{R})$.

**1.** Montrer que les $\mathcal{C}_\lambda$ passent toutes par un même point $M_0 \neq (0, 0)$. Déterminer le lieu $\mathcal{L}$ des centres de courbure de $\mathcal{C}_\lambda$ en $M_0$ quand $\lambda$ varie.

**2.** Donner une équation cartésienne de $\mathcal{L}$. Faire une figure.

**Exercice 6** *(une interprétation de la courbure)*

Soit $\gamma : I \to \mathbf{E}^2$ un arc régulier $\mathcal{C}^2$ paramétré par longueur d'arc. On rappelle qu'il existe une fonction $\alpha : I \to \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\gamma'(s) = \exp(i\alpha(s))$ pour tout $s \in I$ (détermiantion de l'argument de $\gamma'$). Prouver que la courbure (algébrique) de l'arc $\gamma$ au point $\gamma(s)$ vaut $\alpha'(s)$.