ESTIA 1^eAnnée - Mathématiques pour l'ingénieur
Cours du 13 Février 2005
Extrema libres, extrema liés

Jean Esterle

18 avril 2008

Table des matières

1 Ensembles ouverts et fermés, fonctions continues **5**

2 Gradient, hessienne et extrema libres **7**

3 Multiplicateurs de Lagrange et extrema liés **13**

4 Exercices **21**

Chapitre 1

Ensembles ouverts et fermés, fonctions continues

Pour $x = [x_1, ..., x_p] \in \mathbb{R}^p$, on pose $\|x\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{p} |x_j|^2}$. Il s'agit de la **norme euclidienne** sur $\mathbb{R}^p$, déjà étudiée dans le *Cours d'algèbre linéaire* [1].

Pour $a \in \mathbb{R}^p$, $r > 0$ on pose $B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^p \mid \|a - x\| < r\}$, et $\overline{B}(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^p \mid \|a - x\| \leq r\}$. L'ensemble $B(a, r)$ est appellé la boule ouverte de centre a et de rayon r, et l'ensemble $\overline{B}(a, r)$ est appellé la boule fermée de centre a et de rayon r.

Definition 1.0.1 *(i) On dit qu'une partie non vide U de $\mathbb{R}^p$ est* **bornée** *s'il existe $M > 0$ tel que $\|u\| \leq M$ pour tout $u \in U$.*

(ii) On dit qu'une partie non vide U de $\mathbb{R}^p$ est **ouverte** *si pour tout $u \in U$ il existe $r_u > 0$ tel que $B(u, r_u) \subset U$. L'ensemble vide est ouvert par convention.*

(iii) On dit qu'une partie de $\mathbb{R}^p$ est **fermée** *si son complémentaire est une partie ouverte de $\mathbb{R}^p$.*

On va maintenant définir la notion de continuité d'une fonction de plusieurs variables.

Definition 1.0.2 *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}^p$, et soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur A. On dira que f est* **continue** *en $a \in A$ si on a la propriété suivante*

Pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta_\epsilon > 0$ tel que $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ pour tout $x \in B(a, \delta_\epsilon) \cap A$.

On dit que f est continue sur A si elle est continue en a pour tout $a \in A$.

De même que dans le cas des fonctions d'une variable la somme le produit, la composée de deux fonctions continues est continue, de même que le quotient de deux fonctions continues aux points où le dénominateur de ce quotient ne s'annulle pas. En particulier toutes les fonctions polynômiales sont continues. On a alors des conditions suffisantes pour qu'un ensemble soit ouvert, ou fermé.

Proposition 1.0.3 *(i) Un sous-ensemble de $\mathbb{R}^p$ défini par une famille finie d'inégalités strictes faisant intervenir des fonctions continues est ouvert.*

(ii) Un sous-ensemble de $\mathbb{R}^p$ défini par une famille d'inégalités larges ou d'égalités faisant intervenir des fonctions continues est fermé.

On sait que toute fonction continue sur un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ est bornée sur cet intervalle, et y admet un maximum et un minimum absolus. On a plus généralement le résultat suivant.

Théorème 1.0.4 *Soit A une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^p$ et soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est bornée sur A, et f admet un minimum et un maximum absolus sur A, c'est à dire qu'il existe $u, v \in A$ tels que $f(u) \leq f(x) \leq f(v)$ pour tout $x \in A$.*

Ce résultat est important dans sa généralité, mais ne donne évidemment pas de moyen pratique de calculer ce maximum et ce minimum. Ce point fera l'objet des deux chapitres suivants. On sera amené en pratique à décomposer les fermés de $\mathbb{R}^p$ en deux parties, leur intérieur et leur frontière, que l'on définit de la manière suivante.

Definition 1.0.5 *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}^p$. L'* **intérieur** *$Int(A)$de A est la réunion de tous les ouverts contenus dans A. L'adhérence $\overline{A}$ de A est l'intersection de tous les fermés contenant A, et la frontière de A est l'ensemble $Fr(A) = \overline{A} \setminus Int(A)$.*

En fait, $a \in$Int(A) si et seulement si il existe $r_a > 0$ tel que $B(a, r_a) \subset A$, et $a \in \overline{A}$ si et seulement si il existe une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de A telle que $\lim_{n\to\infty} \|x_n - a\| = 0$. Quand A est fermé, on a $\overline{A} = A$. La recherche des maxima ou minima de f sur A relève alors en règle générale de la théorie des **extrema libres** quand ils appartiennent à Int(A), et de la théorie des **extrema liés** quand ils appartiennent à Fr(A).

Chapitre 2

Gradient, hessienne et extrema libres

Dans ce chapitre on s'intéresse aux fonctions définies sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une telle fonction, soit $u = [u_1, ..., u_p] \in U$, et soit $r > 0$ tel que $B(u,r) \subset U$. On définit pour $1 \leq j \leq p$ une fonction $f_{u,j} :]u_j - r, u_j + r[\to \mathbb{R}$ par la formule

$$f_{u,j}(t) = f(u_1, ..., u_{j-1}, t, u_{j+1} ... u_p),$$

avec les conventions évidentes si $j = 1$ ou si $j = p$. On rappelle que la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_j}(u)$ est définie quand $f_{u,j}$ est dérivable en u_j par la formule

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(u) = f'_{u,j}(u_j).$$

On peut alors définir par récurrence quand c'est possible les dérivées partielles successives de f.

On dira que f admet un **maximum relatif** en $u \in U$ s'il existe $r > 0$ tel que $f(x) \leq f(u)$ pour tout $x \in U \cap B(u,r)$, et on dira qu'un maximum relatif est strict s'il existe $r' > 0$ tel que $f(x) < f(u)$ pour tout $x \in U \cap B(u,r')$ distinct de u. De même on dira que f admet un **minimum relatif** en $U \in u$ s'il existe $r > 0$ tel que $f(x) \geq f(u)$ pour tout $x \in U \cap B(u,r)$, et on dira qu'un minimum relatif est strict s'il existe $r' > 0$ tel que $f(x) > f(u)$ pour tout $x \in U \cap B(u,r')$ distinct de u. On dira que f admet un **extremum relatif** en $u \in U$ si elle admet un maximum ou un minimum relatif en u, et on dira que cet extremum est strict s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum strict.

Il est clair que si f admet un extremum relatif en u, alors $f_{u,j}$ admet un extremum relatif en u_j pour $1 \leq j \leq n$, ce qui implique que $f'_{u,j}(u_j) = 0$ si $f_{u,j}$ est dérivable en u_j. Ceci donne le résultat suivant

Proposition 2.0.6 *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, et soit f une fonction admettant des* *dérivées partielles d'ordre* 1 *sur* U. *Si* f *admet un extremum relatif en* $u \in U$, *alors on a*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(u) = 0 \text{ pour tout } j \in \{1, ..., p\}. \tag{2.1}$$

Les éléments de U vérifiant la condition 2.1 sont appelés **points critiques** de f sur U. Un point critique n'est pas nécessairement un extremum relatif, même pour les fonctions d'une seule variable. En effet la fonction $x \to x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, mais sa dérivée s'annulle en 0.

Pour les fonctions d'une variable la dérivabilité d'une fonction en un point équivaut à l'existence d'un développement limité d'ordre 1 de la fonction en ce point. Par contre des exemples simples montrent qu'en dimension ≥ 2 l'existence de dérivées partielles en un point n'entraine pas l'existence d'un développement limité d'ordre 1 en ce point. En d'autres termes l'existence de dérivée partielles en un point ne suffit pas à garantir la différentiabilité d'une fonction en ce point, voir le *Cours de Calcul Différentiel* [2]. Signalons pour mémoire que ces difficultés disparaissent si on suppose les dérivées partielles d'ordre 1 continues sur U (on utilisera ci-dessous la notation $o\left(\|h\|\right)$ pour désigner une fonction de h ayant la forme $\|h\|\epsilon(h)$, où la fonction $h \to \epsilon(h)$, à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, est définie pour $\|h\|$ assez petit et vérifie $\lim_{\|h\| \to 0} \|\epsilon(h)\|) = 0$). On a en effet le résultat suivant, qui se déduit de la version multidimensionnelle du *théorème des accroissements finis.*

Proposition 2.0.7 *Soit* U *un ouvert de* $\mathbb{R}^p$, *et soit* $f : U \to \mathbb{R}$ *une fonction admettant des dérivées partielles d'ordre 1 continues sur* U. *Soit* $u \in U$, *et soit* $r > 0$ *tel que* $B(u, r) \subset U$. *On a alors, pour* $h = [h_1, ..., h_p] \in B(u, r)$,

$$f(u + h) = f(u) + \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(u) h_j + o\left(\|h\|\right). \tag{2.2}$$

On va s'intéresser maintenant au cas des fonctions admettant des dérivées partielles d'ordre ≤ 2 définies et continues sur un ouvert U. Dans ce cas on sait que l'on a $\frac{\partial f^2}{\partial x_j \partial x_k}(u) = \frac{\partial f^2}{\partial x_k \partial x_j}(u)$ pour $1 \leq j \leq p, 1 \leq k \leq p$ et pour tout $u \in U$, et on dispose de développements limités d'ordre 2 de f en tout point de U, donnés par la formule suivante (la notation $o\left(\|h\|^2\right)$ désignant une fonction de h ayant la forme $\|h\|^2 \epsilon(h)$, où la fonction $h \to \epsilon(h)$, à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, est définie pour $\|h\|$ assez petit et vérifie $\lim_{\|h\| \to 0} \|\epsilon(h)\|) = 0$).

Théorème 2.0.8 *Soit* U *un ouvert de* $\mathbb{R}^p$, *et soit* $f : U \to \mathbb{R}$ *une fonction admettant des dérivées partielles d'ordre* ≤ 2 *continues sur* U. *Soit* $u \in U$, *et soit* $r > 0$ *tel que* $B(u, r) \subset U$. *On a alors, pour* $h = [h_1, ..., h_p] \in B(u, r)$,

$$\begin{aligned} f(u+h) = f(u) + \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(u) h_j \\ +\frac{1}{2} \sum_{1 \leq j,k \leq p} \frac{\partial f^2}{\partial x_j \partial x_k}(u) h_j h_k + o\left(\|h\|^2\right). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Le vecteur ligne

$$\mathrm{grad}_f(u) := \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(u), ..., \frac{\partial f}{\partial x_p}(u)\right]$$

est appelé le **gradient** de f en u. La matrice

$$\mathrm{Hess}_f(u) := \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(u)\right]_{\substack{1 \leq j \leq p \\ 1 \leq k \leq p}}$$

est appelée **Hessienne** de f en u. Elle est symétrique si f admet des dérivées partielles d'ordre ≤ 2 continues sur U, et dans ce cas toutes ses valeurs propres sont donc réelles, voir par exemple [1]. On déduit facilement de la formule 2.3 le résultat classique suivant, où la Hessienne joue un rôle analogue à celui joué par la dérivée seconde pour les fonctions d'une variable réelle dont la dérivée s'annulle en un point.

Corollaire 2.0.9 *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$, soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction admettant des dérivées partielles d'ordre ≤ 2 continues sur U et soit $u \in U$ un point critique de f.*

(i) Si toutes les valeurs propres de $Hess_f(u)$ sont strictement positives, alors f admet un minimum relatif strict en u.

(ii) Si toutes les valeurs propres de $Hess_f(u)$ sont strictement négatives, alors f admet un maximum relatif strict en u.

(iii) Si $Hess_f(u)$ admet des valeurs propres de signes opposés, alors f n'admet pas d'extremum relatif en u.

Notons que la condition (i) signifie que $\mathrm{Hess}_f(u)$ est une matrice définie positive.

Considérons par exemple la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par la formule

$$f(x,y) = 2x^2 + 3y^2 + 2\sqrt{2}xy - \frac{8}{9}x^3.$$

On a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x + 2\sqrt{2}y - \frac{8}{3}x^2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6y + 2\sqrt{2}x$.

Donc les points critiques de f sur $\mathbb{R}^2$ sont les solutions du système

$$\begin{cases} 4x + 2\sqrt{2}y - \frac{8}{3}x^2 = 0 \\ 6y + 2\sqrt{2}x = 0 \end{cases}$$

On obtient $y = -\frac{\sqrt{2}x}{3}$, $4x - \frac{4x}{3} - \frac{8}{3}x^2 = 0$, $x(1-x) = 0$, et les deux points critiques de f sont $(0,0)$ et $(1, -\frac{\sqrt{2}}{3})$.

2. On a $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 4 - \frac{16}{3}x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2\sqrt{2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6$. On obtient

$$Hess_f(x,y) = \begin{bmatrix} 4 - \frac{16}{3}x & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 6 \end{bmatrix}, Hess_f(0,0) = \begin{bmatrix} 4 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 6 \end{bmatrix}.$$

Le déterminant de $\text{Hess}_f(0,0)$ est égal à 24-8=16, donc les deux valeurs propres de $\text{Hess}_f(0,0)$ sont de même signe. Comme sa trace est positive, elles sont toutes les deux positives, et par conséquent f admet un minimum relatif strict en $(0,0)$.

D'autre part on a

$$Hess_f(1, -\frac{\sqrt{2}}{3}) = \begin{bmatrix} 4 - \frac{16}{3} & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 6 \end{bmatrix}.$$

Il est clair que $\det\Big(Hess_f(1, -\frac{\sqrt{2}}{3})\Big) < 0$, donc la hessienne de f en $\Big(1, -\frac{\sqrt{2}}{3}\Big)$ a deux valeurs propres de signe opposés, et il n'y a pas d'extremum relatif pour f en ce point. Comme tout extremum local est un point critique, le seul extremum local de f sur $\mathbb{R}^2$ est un minimum local en $(0,0)$.

En fait on a $\lim_{x \to +\infty} 6x^2 - \frac{8x^3}{9} = -\infty$, donc ce minimum relatif de f en $(0,0)$ n'est évidemment pas un minimum absolu de f sur $\mathbb{R}^2$.

On illustre ces résultats en les visualisant sous Matlab.

On commence par créer une "M-file" représentant la fonction à étudier.

```
>> edit phi
```

On obtient une réponse en anglais disant que la m-file en question n'existe pas et proposant de la créer. Après avoir répondu"yes" on peut entrer la fonction sous Matlab.

```
function z=phi(x,y)
z=2*x.^2 +3*y.^2 +2*sqrt(2)*x.*y -(8/9)*x.^3
```

On obtient les deux figures cherchées.

```
>>  X1=[-0.3:0.01:0.3];Y1=[-0.3:0.01:0.3];
X2=[0.7:0.01:1.3];Y2=[-sqrt(2)/3-0.3:0.01:-sqrt(2)/3+0.3];
[x1,y1]=meshgrid(X1,Y1);[x2,y2]=meshgrid(X2,Y2);z1=phi(x1,y1);z2=phi(x2,y2);
subplot(121),mesh(x1,y1,z1); hold on
title('La fonction f a un minimum relatif en (0,0)'); hold on; subplot(122),
title('Pas d extremum en (1,-sqrt(2)/3)')
print fig1
```

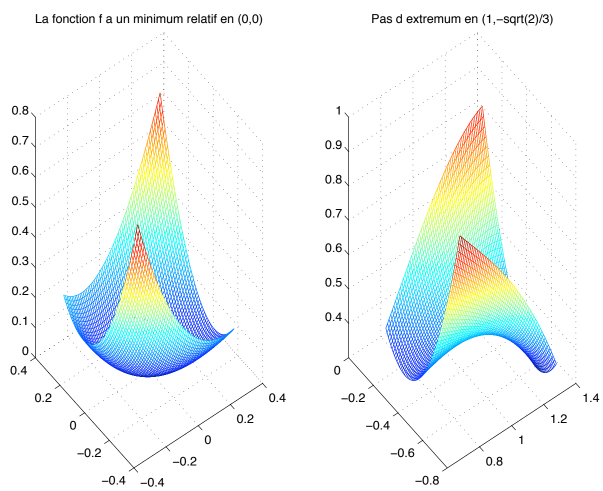


Fig. 1 : La fonction $f(x,y) = 2x^2 + 3y^2 + 2\sqrt{2}xy - \frac{8}{9}x^3$ **au voisinage de ses deux points critiques.**

On va maintenant reprendre ces calculs sous Mupad. On notera l'utilisation des commandes "subs" et "op" pour calculer la Hessienne aux points critiques. La hessienne en $(0,0)$ étant définie positive, on a un minimum. Pour l'autre point critique la hessienne n'est pas définie positive. On calcule alors le déterminant et celui-ci étant négatif on voit qu'il y a deux valeurs propres de signes opposés, donc pas d'extremum.

```
f:=(x,y)->2*x^2+3*y^2+2*sqrt(2)*x*y-(8/9)*x^3;
```

```
(x, y) -> (2*x^2 + 3*y^2 + 2*sqrt(2)*x*y) - 8/9*x^3
```

```
sol:=solve({diff(f(x,y),x)=0,diff(f(x,y),y)=0},{x,y});
```

$$\left\{[x = 0, y = 0], \left[x = 1, y = -\frac{\sqrt{2}}{3}\right]\right\}$$

```
A:=(x,y)->linalg::hessian(f(x,y),[x,y]);
```

```
(x, y) -> linalg::hessian(f(x, y), [x, y])
```

```
op(sol,1);
```

$$[x = 0, \ y = 0]$$

```
A(x,y);
```

$$\begin{pmatrix} -\frac{16\cdot x}{3}+4 & 2\cdot\sqrt{2} \\ 2\cdot\sqrt{2} & 6 \end{pmatrix}$$

```
A0:=subs(A(x,y),op(sol,1));A1:=subs(A(x,y),op(sol,2));
```

$$\begin{pmatrix} 4 & 2\cdot\sqrt{2} \\ 2\cdot\sqrt{2} & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & 2\cdot\sqrt{2} \\ 2\cdot\sqrt{2} & 6 \end{pmatrix}$$

```
linalg::isPosDef(A0);linalg::isPosDef(A1);
```

true

false

```
linalg::det(A1);
```

$$-16$$

Chapitre 3

Multiplicateurs de Lagrange et extrema liés

On va maintenant s'intéresser aux fonctions définies sur un ensemble F de la forme $F = \{x \in V \mid g_1(x) = g_2(x)... = g_m(x) = 0\}$ où V est un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et où $g_1, ..., g_m$ sont des fonctions admettant des dérivées partielles continues sur V. On définit les maxima et mimina relatifs d'une fonction f sur F de même que plus haut : par exemple on dira que f admet un maximum relatif en $u \in U$ s'il existe $r > 0$ tel que $f(u) \geq f(x)$ pour tout $x \in B(u,r) \cap F$, et on dira que ce maximum relatif est strict si on peut choisir r de façon que $f(u) > f(x)$ pour tout $x \in B(u,r) \cap F$ distinct de u.

On va maintenant énoncer le résultat de base de la théorie des **extrema liés** (appelés également **extrema sous contrainte**).

Théorème 3.0.10 *Soit F un fermé de $\mathbb{R}^p$ défini par le système d'équations*

$$g_1(x) = g_2(x) = ... = g_k(x) = 0,$$

où $g_1, ..., g_k$ sont des fonctions admettant des dérivées partielles continues sur un ouvert V contenant F, et soit f une fonction définie sur F qui coincide avec la restriction à F d'une fonction admettant des dérivées partielles continues sur un ouvert W contenant F. Si f admet sur F un extremum relatif en $u \in F$, alors la famille

$$\{grad(f)(u), grad(g_1)(u), ..., grad(g_k)(u)\}$$

est liée.

En particulier si la famille $\{grad(g_1)(u), ..., grad(g_k)(u)\}$ est libre, il existe $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$grad(f)(u) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j grad(g_j)(u). \tag{3.1}$$

Les réels $\lambda_1, ..., \lambda_k$ sont alors appelés les **multiplicateurs de Lagrange** *de f en u.*

On va prendre comme premier exemple le calcul de la distance d'un point à un plan. Considérons dans l'espace affine euclidien usuel rapporté à un repère orthonormé le plan P d'équation $ax + by + cz = d$, où $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, et soit M_0 le point de coordonnées (x_0, y_0, z_0). On pose donc

$$f(x, y, z) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2,$$

et on se propose de minimiser f sous la contrainte $ax + by + cz = d$. En posant $g(x, y, z) = ax + by + cz - d$, on obtient $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2(x - x_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 2(y - y_0), \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 2(z - z_0), \frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z) = a, \frac{\partial g}{\partial y}(x, y, z) = b, \frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z) = c.$ Donc les extrema relatifs de la distance à M_0 sur P sont les solutions du système

$$\begin{cases} 2(x - x_0) = \lambda a \\ 2(y - y_0) = \lambda b \\ 2(z - z_0) = \lambda c \\ ax + by + cz = d \end{cases}$$

où λ est un "multiplicateur de Lagrange".

En posant $\mu = \lambda/2$, et en reportant les trois premières équations dans la quatrième, on voit que les coordonnées du point H de P le plus proche de M_0 sont données par les formules

$$\begin{cases} x = x_0 + \mu a \\ y = y_0 + \mu b \\ z = z_0 + \mu c \end{cases}$$

avec $\mu = \frac{d - ax_0 - by_0 - cz_0}{a^2 + b^2 + c^2}$. On a alors

$$HM_0^2 = \mu^2(a^2 + b^2 + c^2) = \frac{(d - ax_0 - by_0 - cz_0)^2}{a^2 + b^2 + c^2},$$

ce qui donne la formule bien connue

$$\text{dist}(M_0, P) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Notons qu'on a admis qu'il y avait bien un point de P dont la distance à M_0 est minimale, ce qui est géométriquement évident. En général on peut utiliser le résultat suivant, qui se déduit du fait que toute fonction continue sur un fermé borné F admet un minimum et un maximum absolus sur F.

Proposition 3.0.11 *Soit F un fermé non borné de $\mathbb{R}^p$, et soit f une fonction continue sur F.*
Si $lim_{\|x\|\to+\infty, x\in F} = +\infty$, alors f admet un minimum absolu sur F.
Si $lim_{\|x\|\to+\infty, x\in F} = -\infty$, alors f admet un maximum absolu sur F.

Nous considérons maintenant un exemple faisant intervenir deux multiplicateurs de Lagrange. Il s'agit de maximiser z sur le fermé F défini par les équations

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=3 \\ x+y+z=1 \end{cases}$$

Le théorème précédent montre que les coordonnées des points où la fonction z admet sont maximum sur F vérifient le système

$$\begin{cases} (0,0,1)=\lambda(2x,2y,2z)+\mu(1,1,1) \\ x^2+y^2+z^2=3 \\ x+y+z=1 \end{cases}$$

On obtient un système de 5 équations à 5 inconnues, que l'on peut résoudre car on déduit facilement de la condition des multiplicateurs de Lagrange que $y=z$. On peut aussi éviter d'introduire λ et μ en remplaçant la condition $(0,0,1) = \lambda(2x,2y,2z)+\mu(1,1,1)$ par la condition

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

En développant le déterminant par rapport à la première ligne on obtient $x=y$, ce qui donne $2x^2+z^2=3, 2x+z=1$, $2x^2+(1-2x)^2=3$, $6x^2-4x-2=0$. Ceci donne $x\in\{-1/3,1\}$, et on obtient deux points critiques pour ce problème d'extrema liés, à savoir $(-1/3,-1/3,5/3)$ et $(1,1,-1)$. Comme F (qui est en fait un cercle) est bien évidemment un fermé borné de $\mathbb{R}^3$, z admet un maximum et un minimum absolus sur F. On voit donc que $-1\le z\le 5/3$ pour $(x,y,z)\in F$, la valeur -1 étant atteinte en $(1,1,-1)$ et la valeur $5/3$ étant atteinte en $(-1/3,-1/3,5/3)$.

On conclut cette brève présentation en étudiant le maximum et le minimum de $f:(x,y,z)\to x^2+yz$ sur $A := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2\le 1\}$. L'intérieur de A

est la boule ouverte $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$, et la frontière de A est la sphère $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Comme A est fermé et borné, f admet un minimum et un maximum absolus sur A. On a $\mathrm{grad}_f(x, y, z) = (2x, z, y)$, donc $(0, 0, 0)$ est le seul point critique de f sur B. On a

$$\mathrm{Hess}_f(0,0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Comme le déterminant de cette matrice est égal à -2, elles possède des valeurs propres de signes opposés, et f, qui n'admet pas d'extremum relatif en $(0, 0, 0)$, n'admet en fait aucun extremum relatif sur B. Donc le mimimum et le maximum de f sur A sont atteints sur S, ce qui renvoie à un problème d'extrema liés.

Posons $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. On a $\mathrm{grad}_g(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$, et les coordonnées du maximum et du minimum de f sur A vérifient le système

$$\begin{cases} 2x = 2\lambda x \\ z = 2\lambda y \\ y = 2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

Si $x \neq 0$, on a $\lambda = 1$, donc $z = 2y = 4z$, $z = y = 0$, ce qui donne les points $(-1, 0, 0)$ et $(1, 0, 0)$ où f prend la valeur 1. Sinon $x = 0$, $z = 4\lambda^2 z$, $y = 4\lambda^2 y$, $y^2 + z^2 = 1$. Si $4\lambda^2 \neq 1$ on aurait $y = z = 0$, ce qui est impossible. Donc ou bien $\lambda = 1/2$, ce qui donne $y = z$, ou bien $\lambda = -1/2$, ce qui donne $y = -z$. Les seules possibilités dans ce cas sont $(0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ et $(0, -1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$, où f prend la valeur $1/2$, et $(0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ et $(0, -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, où f prend la valeur $-1/2$.

On voit donc que le maximum de f sur A, atteint en $(-1, 0, 0)$ et $(1, 0, 0)$, est égal à 1, tandis que le minimum de f sur A, atteint en $(0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ et $(0, -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, est égal à $-1/2$.

On peut introduire pour les extrema liés une notion analogue à la notion de matrice hessienne vue plus haut pour les extrema libres, mais nous ne le ferons pas ici.

Pour conclure cette brève présentation, on reprend sous Mupad le calcul des maxima et minima de la fonction z sous les contraintes $x^2+y^2+z^2 = 3, x+y+z = 1$. Les maxima et les minima de z étaient évidents à l'affichage des points critiques, mais on a cependant tenu à utiliser subs et op en prévision de situations plus compliquées. On a également visualisé sous Mupad le cercle donné par les équations $x^2 + y^2 + z^2 = 3, x + y + z = 1$.

```
f:=(x,y,z)->z;
g1:=(x,y,z)->x^2+y^2+z^2-3;g2:=(x,y,z)->x+y+z-1;
gradf:=linalg::grad(f(x,y,z),[x,y,z]);
gradg1:=linalg::grad(g1(x,y,z),[x,y,z]);
gradg2:=linalg::grad(g2(x,y,z),[x,y,z]);
sol:=solve({diff(f(x,y,z),x)=u*diff(g1(x,y,z),x)+v*
diff(g2(x,y,z),x),
diff(f(x,y,z),y)=u*diff(g1(x,y,z),y)+v*diff(g2(x,y,z),y),
diff(f(x,y,z),z)=u*diff(g1(x,y,z),z)+v*diff(g2(x,y,z),z),
g1(x,y,z)=0,g2(x,y,z)=0},{x,y,z,u,v});
```

```
(x, y, z) -> z
(x, y, z) -> (x^2 + y^2 + z^2) - 3
(x, y, z) -> (x + y + z) - 1
```

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2\cdot x\\2\cdot y\\2\cdot z\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\left\{\left[u = -\frac{1}{4}, v = \frac{1}{2}, x = 1, y = 1, z = -1\right], \left[u = \frac{1}{4}, v = \frac{1}{6}, x = -\frac{1}{3}, y = -\frac{1}{3}, z = \frac{5}{3}\right.\right.$$

```
Sol:=op(sol);
```

$$\left[u = -\frac{1}{4}, v = \frac{1}{2}, x = 1, y = 1, z = -1\right], \left[u = \frac{1}{4}, v = \frac{1}{6}, x = -\frac{1}{3}, y = -\frac{1}{3}, z = \frac{5}{3}\right]$$

```
sol1:=op(Sol,1);sol2:=op(Sol,2);
```

$$\left[u = -\frac{1}{4}, v = \frac{1}{2}, x = 1, y = 1, z = -1\right]$$

$$\left[u = \frac{1}{4}, v = \frac{1}{6}, x = -\frac{1}{3}, y = -\frac{1}{3}, z = \frac{5}{3}\right]$$

```
a0:=(op(sol1,1),op(sol1,2),op(sol1,3));
```

$$u = -\frac{1}{4},\ v = \frac{1}{2},\ x = 1$$

```
a1:=[op(sol1,i) $i=3..5];
```

$$[x = 1,\ y = 1,\ z = -1]$$

```
a2:=[op(sol2,i) $i=3..5];
```

$$\left[x = -\frac{1}{3},\ y = -\frac{1}{3},\ z = \frac{5}{3}\right]$$

```
maxf:=subs(f(x,y,z),a2);
minf:=subs(f(x,y,z),a1);
```

$$\frac{5}{3}$$

$$-1$$

```
x(t):=t;y1(t):= 1/2-t/2-sqrt(2*t-3*t^2+5)/2;
y2(t):=1/2-t/2+sqrt(2*t-3*t^2+5)/2;z1(t):=1-x(t)-y1(t);
z2(t):=1-x(t)-y2(t);
```

$$t$$

$$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2\cdot t - 3\cdot t^2 + 5}}{2} - \frac{t}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2\cdot t - 3\cdot t^2 + 5}}{2} - \frac{t}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2\cdot t - 3\cdot t^2 + 5}}{2} - \frac{t}{2} + \frac{1}{2}$$

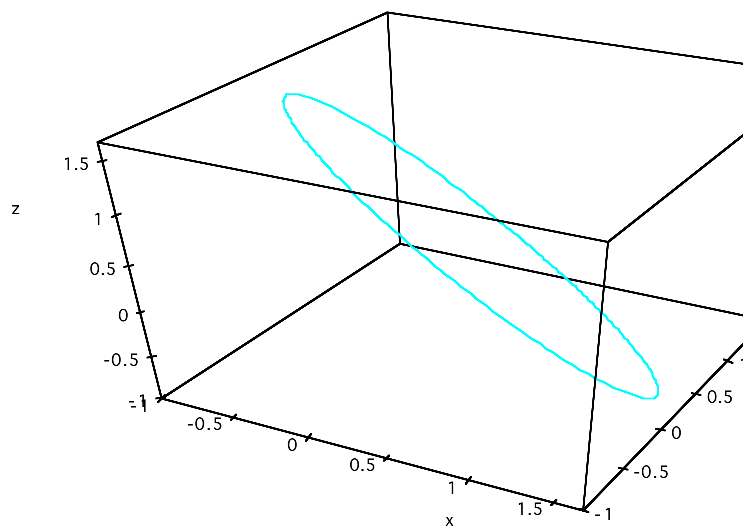
$$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2\cdot t - 3\cdot t^2 + 5}}{2} - \frac{t}{2}$$

```
p1:=plot::Curve3d([x(t),y1(t),z1(t)],t=-1..5/3);
p2:=plot::Curve3d([x(t),y2(t),z2(t)],t=-1..5/3);
```

$$\text{plot::Curve3d}\left(\left[t,\ -\frac{t}{2}-\frac{\sqrt{2\cdot t-3\cdot t^2+5}}{2}+\frac{1}{2},\ -\frac{t}{2}+\frac{\sqrt{2\cdot t-3\cdot t^2+5}}{2}+\frac{1}{2}\right],\ \right.$$

$$\text{plot::Curve3d}\left(\left[t,\ -\frac{t}{2}+\frac{\sqrt{2\cdot t-3\cdot t^2+5}}{2}+\frac{1}{2},\ -\frac{t}{2}-\frac{\sqrt{2\cdot t-3\cdot t^2+5}}{2}+\frac{1}{2}\right],\ \right.$$

```
plot(p1,p2);
```



Chapitre 4

Exercices

Exercice 1.

Etudier les extrema relatifs et les extrema absolus de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par la formule

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2.$$

Exercice 2.

Trouver les points les plus proches et les plus éloignés de l'origine de la courbe d'équation

$$x^6 + y^6 = 1.$$

Exercice 3.

On note $S = \{x \in R^n | \| x \| = 1\}$ la sphère unité de R^n. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction admettant des dérivées partielles continues telle que la restriction de f à S soit constante.

Montrer qu'il existe $a \in R^n$ tel que $\| a \| < 1$ et tel que $\mathrm{grad}_f a = 0$.

Exercice 4. Mise en boîte à peu de frais.

(1) Soient a, b, c trois réels strictement positifs tels que $a + b + c = 1$. Montrer que l'on a, pour $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$,

$$x^a y^b z^c \leq ax + by + cz.$$

Indication : on pourra rechercher le maximum du premier membre, fonction de x, y, z , sur le plan d'équation $ax + by + cz = 1$.

(2) En déduire comment obtenir un parallélipipède rectangle d'aire minimum contenant un volume donné (emballage le plus économique).

Exercice 5.

On munit R^n de la norme euclidienne usuelle.

Etudier les extrema de $f : x \to \| x \|^2$ sur la quadrique S d'équation $Q(x) = 1$, où Q est une forme quadratique définie positive sur R^n.

Exercice 6. Inégalité de Hadamard.

L'espace R^n est muni du produit scalaire usuel. On note $f(v_1, ..., v_n)$ le déterminant de la matrice carrée d'ordre n formée des vecteurs colonnes $v_1, ..., v_n$.

(1) Montrer que le maximum de f sur l'ensemble X défini par

$$\| v_1 \| = ... = \| v_n \| = 1$$

est atteint, et qu'il est strictement positif.

(2) Montrer par le théorème des extrema liés que, si le maximum de f est atteint en $(v_1 ..., v_n)$, les v_i forment une base orthonormale de R^n.

(3) En déduire l'inégalité de Hadamard :

$$|det(v_1, ..., v_n)| \leq \| v_1 \| ... \| v_n \| .$$

valable pour toute famille $v_1, ..., v_n$ d'éléments de R^n. Quand a-t-on égalité ?

Exercice 7. Mupad et Matlab.

Effectuer sous Mupad les calculs des exercices 1 et 2, ainsi que ceux correspondant à la détermination des maxima et minima de $f : (x, y, z) \to x^2 + yz$ sur $A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

Illustere ces calculs par des représentations graphiques sous Mupad et Matlab.

Bibliographie

[1] D.Lannes, J. Esterle, F. Zarouf et R. Zarouf, Cours d'algèbre linéaire, ESTIA, édition 2006.

[2] J. Esterle, J. Giol et O. Réjasse, Courbes, Surfaces et Calcul Différentiel, ESTIA, édition 2005.