Master 1, Optimisation convexe et problèmes inverses

Feuille de TD sur les outils algébriques de l'optimisation

Exercice 1 Étant donnés :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(1) Vérifier que le système $Ax = b$, $x \in \mathbb{R}^2$, n'est pas résoluble (motiver la réponse) ;

(2) Déterminer la solution du système au sens des moindres carrés ;

(3) Calculer la projection orthogonale de b sur l'espace $\mathrm{Im}(A)$, qu'on indiquera avec b' ;

(4) Calculer la matrice qui représente l'opérateur de projection orthogonale $P_{\mathrm{Im}(A)}$ sur le sous-espace $\mathrm{Im}(A)$ et vérifier que $b' = P_{\mathrm{Im}(A)} b$;

(5) Déterminer la décomposition $b = w + w'$ avec $w \in \mathrm{Im}(A)$ et $w' \in \mathrm{Im}(A)^{\perp}$ en vérifiant l'orthogonalité entre w' et les vecteurs qui appartiennent à l'image de A.

Exercice 2 Soient A et B les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

(1) Calculer les valeurs singulières de A et de B ;

(2) Prouver que, donnés une base orthonormale quelconque (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$, la circonférence unitaire C de $\mathbb{R}^2$ sous forme paramétrique avec paramètre t est définie comme ça :

$$C(t) = \cos(t) e_1 + \sin(t) e_2 \qquad t \in [0, 2\pi].$$

(3) Déterminer l'image de C via les opérateurs linéaires $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ et $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définis par $Tv = Av$ et $Sv = Bv$, $\forall v \in \mathbb{R}^2$. *Suggestion* : utiliser les bases orthonormales des vecteurs propres de $A^t A$ et $B^t B$.

Exercice 3

(1) Prouver que, pour toute matrice réelle A, les valeurs propres non nulles de $A^t A$ et de AA^t sont les mêmes. Si A est rectangulaire, $A^t A$ et AA^t sont matrices carrées avec dimensions différentes, déduire quelle est la matrice qui convient utiliser pour le calcul des valeurs singulières de A.

(2) Calculer la SVD de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Suggestion : la preuve du théorème de la SVD est constructive... En déduire la pseudo-inverse de Moore-Penrose $A^{\dagger}$ de A.