Convexité

1 Fonction type

Soit A une matrice symétrique réelle de taille $n \times n$, et $b \in \mathbb{R}^n$, et si $x \in \mathbb{R}^n$:

$$J(x) = \langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle \tag{1}$$

1. Calculer la différentielle de J, puis sa différentielle seconde.
2. Trouver une CNS sur A et b pour que J soit convexe.
3. Trouver une CNS sur A et b pour que J soit strictement convexe.
4. Calculer la différentielle de J, puis sa différentielle seconde, dans le cas où A n'est plus supposé symmétrique.

2 Calcul différentiel

Pour $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, on pose

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \tag{2}$$

Déterminer le gradient et la Hessienne de f. Cette derniére est-elle positive, défini positive ?

3 Calcul de la racine carré d'un réel positif

On s'intéresse au calcul numérique de la racine carré d'un réel positif a. Pour cela on pose $f(x) = x^2 - a$.

1. Expliquer le lien entre la fonction f et le probléme considéré.
2. Programmer en matlab une fonction prenant en entrée un encadrement de $\sqrt{a}$ et donnant en sortie une approximation de $\sqrt{a}$ é $\epsilon = 10^{-2}$ prés, en utilisant le principe de dichotomie. Donner le temps de calcul (on pourra utiliser les instructions *tic* et *toc*), ainsi que le nombre d'itération.
3. Méme question avec $\epsilon = 10^{-5}$. Commentaire ?
4. Soit $\rho > 0$, et $b \in \mathbb{R}$. On considére la suite donnée par $x_0 = b$ et

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{3}$$

   Montrer que l'on a :

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \tag{4}$$

5. Ecrire une fonction matlab, qui en entrée prend un réel positif a, un réel b et une précision ϵ, et en sortie une approximation é ϵ prés de $\sqrt{a}$.
6. Quel comportement observe-t-on si $b > 0$, si $b < 0$, si $b = 0$?
7. Regarder les temps de calculs et nombre d'itérations pour une précision ϵ donnée. Commentaire ?

4 Exemple

Soit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \sqrt{x^4 + 1} - x + 3 \tag{5}$$

1. Montrer que f admet un minimum sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer les points critiques de f.
3. Parmi les points critiques, lesquels correspondent é des minima ?

5 Contre-exemples

On a rappelé en cours qu'en dimension finie, si J est une fonction continue coercive définie sur un ensemble fermé non vide K, alors J atteint son minimum sur K.

Donner un contre-exemple dans les cas suivants :

1. K non fermé.
2. J non continue.
3. J non coercive.

6 Extrema

Déterminer les extrema, s'ils existent, des fonctions suivantes :

1. $f(x, y) = ax^2 + by^2$ avec a et b dans $\mathbb{R}$.
2. $f(x, y) = x^2 - 3xy + y^2$
3. $f(x, y) = x^{1/2}y^{1/3} - x - 2y$
4. $f(x, y) = \frac{xy}{(1+x^2)(1+y^2)}$
5. $f(x, y) = \frac{x}{(1+x^2+y^2)}$
6. $f(x, y) = x^2y^2 + x^2 + y^2 + 2axy$ avec $a \geq 0$.

7 Convexité

1. La composée de 2 fonctions convexe est-elle convexe ?
2. On considére les fonctions définies de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = \|x\|$ et $g(x) = \|x\|^2$. Ces fonctions sont-elles convexes ?
3. Soit f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ convexe. Montrer que si f admet un minimiseur local en x_0, alors $f(x_0)$ est en fait un minimum global.
4. Soit f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ strictement convexe. Montrer que si f admet un minimiseur, alors ce minimiseur est unique.
5. Soit f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que si f admet un minimum, alors ce minimum est unique.

8 Fonctions convexes et fonctions monotones

$E = \mathbb{R}^n$, et $J : E \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable.

1. Montrer que si J est convexe, alors ∇J est monotone, i.e. :
$$\langle \nabla J(x) - \nabla J(y), x - y \rangle \geq 0$$
pour tout (x, y) dans E^2.
2. Réciproquement, montrer que si ∇J est monotone, alors J est convexe.
Indication : on pourra étudier les variations de la fonction :
$$\phi(t) = (1 - t)J(x) + tJ(y) - J((1 - t)x + ty)$$

9 Gaussiennes

Soit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2}\right) \tag{6}$$
et $x_1, \ldots, x_n$ fixés.

Trouver μ^* dans $\mathbb{R}$ qui maximise la quantité $\Pi_{i=1}^n f(x_i)$.

10 Projection sur un convexe fermé

Soit C un convexe fermé non vide de $E = \mathbb{R}^N$, et $y \in E$.

1. Montrer que $\tilde{x} = P_C(y)$ (projection orthogonale de y sur C= vérifie :
$$\forall x \in C \ , \ \langle x - \tilde{x}, x - y \rangle \geq 0$$
2. Montrer réciproquement que si $\tilde{x}$ vérifie la relation précédente, alors $\tilde{x} = P_C(y)$.
Indication : on pourra introduire le point $z = \tilde{x} + t(x - \tilde{x})$ pour $t \in]0, 1]$.

11 Fonction de pénalisation

Dans la méthode de pénalisation, la fonction de pénalisation doit étre C^1, ce qui impose des resctrictions quand é son choix.

Soit g une fonction convexe de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$. Soit g^+ la fonction définie par :

$$g^+(x) = \max(g(x), 0)$$

1. Montrer que g^+ est convexe, puis que $(g^+)^2$ est convexe.
2. Montrer que la fonction $s \mapsto (s^+)^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est dérivable.
   En déduire que si g est différentiable, alors $(g^+)^2$ est aussi différentiable. Calculer sa différentielle en fonction de celle de g.
3. Proposer des fonctions de pénalisation pour les contraintes suivantes : $x \leq 0$, $g(x) = 0$, $g(x) \leq 0$.

12 Opérateur proximal

On considère $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ et $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$. On considère la fonction $f(x) = \|Ax - b\|^2$.

1. Calculer $\nabla f(x)$. De quelle dimension est ce vecteur ?
2. Calculer $\nabla^2 f(x)$. De quelles dimensions est cette matrice ? Cette matrice est-elle symmétrique ? Cette matrice est-elle positive ?
3. On appelle $prox_f(x)$ la fonction définie par :

$$prox_f(x) = argmin_y f(y) + \frac{1}{2}\|y - x\|^2 \tag{7}$$

   Montrer que $prox(x)$ est bien défini de manière unique. Calculer explicitement $prox(x)$.