# Eléments de correction du DS1 jeudi 15 octobre 2009, SVE 101

**Exercice 1.**
*1) Donner la formule d'intégration par parties.*
Soient $f$ et $g$ deux fonctions dérivables et de dérivées continues sur $[a,b]$ alors

$$\int_a^b f(t)g'(t)\,dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,dt.$$

*2) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_1^2 x^3 \ln x\,dx$.*
On prend $f(x) = \ln x$ et $g(x) = x^4/4$ alors $f$ et $g$ sont dérivables et de dérivées continues sur $[1,2]$. $f'(x) = \frac{1}{x}$ et $g'(x) = x^3$, la formule d'intégration par parties nous donne

$$\int_1^2 x^3 \ln x\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^3}{4}\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\ln x - \frac{x^4}{16}\right]_1^2 = 4\ln 2 - \frac{15}{16}.$$

**Exercice 2.**
*1) Déterminer deux réels $a$ et $b$ tels que l'on ait pour tout réel $x$ différent de -3 et -5*

$$\frac{1}{x^2+8x+15} = \frac{a}{x+3} + \frac{b}{x+5}.$$

En réduisant au même dénominateur

$$\frac{a}{x+3} + \frac{b}{x+5} = \frac{a(x+5)+b(x+3)}{(x+3)(x+5)} = \frac{(a+b)x+(5a+3b)}{x^2+8x+15},$$

cette fraction est égale à $\frac{1}{x^2+8x+15}$ si et seulement si $(a+b)x+(5a+3b) = 1$ soit si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{l} a+b=0 \\ 5a+3b=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=-b \\ -5b+3b=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=1/2 \\ b=-1/2 \end{array}\right.$$

*2) Calculer $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+8x+15}$.*

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{x^2+8x+15} = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}\frac{1}{x+3} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+5}\right)dx &= \left[\frac{1}{2}\ln(x+3) - \frac{1}{2}\ln(x+5)\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}(\ln 4 - \ln 3 + \ln 6 + \ln 5) = \frac{1}{2}\ln\frac{10}{9}.\end{aligned}$$

**Exercice 3.**
*1) Résoudre l'équation différentielle $y' = x^2 y$.*
Une primitive de la fonction $x \mapsto x^2$ est la fonction $x \mapsto x^3/3$. Les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = Ce^{x^3/3}$ avec $C$ constante réelle arbitraire.
*2) Trouver la solution de cette équation satisfaisant la condition initiale $y(0) = -1$.*
$y(0) = -1 = Ce^0 = C$, la solution satisfaisant la condition initiale $y(0) = -1$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = -e^{x^3/3}$.

**Exercice 4.**
*Résoudre l'équation différentielle $y' + 2y = 4e^{-x}$*

On commence par résoudre l'équation homogène $y' + 2y = 0$ qui a pour solutions les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y_0(x) = Ce^{-2x}$ avec $C$ constante réelle arbitraire.
Puis on cherche une solution particulière de $y' + 2y = 4e^{-x}$ sous la forme $y_P(x) = Ke^{-x}$. On a $y_P'(x) = -Ke^{-x}$ et $y_P$ est solution de l'équation si et seulement si $(-K+2K)e^{-x} = 4e^{-x}$ soit $K = 4$, $y_P(x) = 4e^{-x}$.
Les solutions de l'équation différentielle sont la somme des solutions de l'équation homogène et d'une solution particulière, soit les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = Ce^{-2x} + 4e^{-x}$ avec $C$ constante réelle arbitraire.

**Exercice 5.**
*On va étudier l'équation différentielle suivante :*

$$\text{(E)} \quad y'' - 2y' + y = 2\cos(x) + x^2 + 3.$$

*1) Résoudre l'équation homogène (ou sans second membre) associée à l'équation* (E).
L'équation caractéristique associée à l'équation homogène est $r^2 - 2r + 1 = 0$ soit $(r-1)^2 = 0$, elle admet 1 comme racine double. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y_0(x) = (C_1x + C_2)e^x$ avec $C_1$ et $C_2$ des constantes réelles arbitraires.
*2) Trouver une solution particulière de l'équation*

$$(\text{E}_1) \quad y'' - 2y' + y = 2\cos(x).$$

$i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche la solution particulière sous la forme $y_1(x) = A\cos x + B\sin x$, $y_1'(x) = -A\sin x + B\cos x$ et $y_1''(x) = -A\cos x - B\sin x$. $y_1''(x) - 2y_1'(x) + y_1(x) = (-A-2B+A)\cos x + (-B+2A+B)\sin x = 2\cos(x)$ si et seulement si $A = 0$ et $B = -1$, $y_1(x) = -\sin x$.
*3) Trouver une solution particulière de l'équation*

$$(\text{E}_2) \quad y'' - 2y' + y = x^2 + 3.$$

0 n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche la solution particulière sous la forme $y_2(x) = Ax^2+Bx+C$, $y_2'(x) = 2Ax+B$ et $y_2''(x) = 2A$. $y_2''(x)-2y_2'(x)+y_2(x) = Ax^2+(B-4A)x+(C-2B+2A) = x^2+3$ si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{l} A = 1 \\ B - 4A = 0 \\ C - 2B + 2A = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} A = 1 \\ B = 4A = 4 \\ C = 2B - 2A + 3 = 9 \end{array}\right.$$

$y_2(x) = x^2 + 4x + 9$.
*4) Donner toutes les solutions de* (E).
Avec le principe de superposition, les solutions de (E) sont la somme des solutions de l'équation homogène, d'une solution particulière de $(\text{E}_1)$ et d'une solution particulière de $(\text{E}_2)$. Ce sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = (C_1x + C_2)e^x - \sin x + x^2 + 4x + 9$ avec $C_1$ et $C_2$ des constantes réelles arbitraires.

*Barème : Ex1 = 40 pts, Ex2 = 40 pts, Ex3 = 20 pts, Ex4 = 30 pts, Ex5 = 70 pts.*