ANNEE UNIVERSITAIRE 2011/2012

UE M1MI 2012 (Algèbre 1)
Devoir surveillé 1
Date : 05/03/2012 Heure : 14 h Durée : 1h30

Documents non autorisés. La calculette homologuée par l'université est le seul matériel électronique autorisé.

Exercice 1 *Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels (justifier) :*

1. *$A = \{f \in E\,,\ f(x) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}\}$;*
   La fonction f constante égale à 1 (i.e. $f(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$) appartient à A. Cependant $(-1) \cdot f$ est la fonction constante, égale à -1, donc A n'est pas stable par multiplication par les scalaires : ce n'est pas un sous-espace vectoriel de E.
2. *$B = \{f \in E\,,\ f \text{ est paire}\}$;*
   Rappelons qu'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est dite paire si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$. L'ensemble B n'est pas vide car il contient la fonction identiquement nulle. Soient $f, g \in B$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$(\lambda f + \mu g)(-x) = \lambda f(-x) + \mu g(-x) = \lambda f(x) + \mu g(x) = (\lambda f + \mu g)(x).$$
   Par conséquent, B est stable par somme, et multiplication par les scalaires : c'est un sous-espace vectoriel de E.
3. *$C = \{f \in E\,,\ f(1) = f(0)\}$.*
   L'ensemble C n'est pas vide car il contient la fonction identiquement nulle. Soient $f, g \in C$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors,
   $$(\lambda f + \mu g)(0) = \lambda f(0) + \mu g(0) = \lambda f(1) + \mu g(1) = (\lambda f + \mu g)(1).$$
   Par conséquent, C est stable par somme, et multiplication par les scalaires : c'est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 2 *Dans $\mathbb{R}^4$, on se donne les vecteurs suivants*

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix},\ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

1. *Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est liée.*
   Il s'agit de trouver $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ non tous nuls et tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0$, ce qui revient à résoudre le système
   $$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & - & 2\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & - & 3\lambda_3 & = & 0 \\ -\lambda_1 & + & 2\lambda_2 & - & 3\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$
   La deuxième équation donne $\lambda_2 = 2\lambda_3$ et si on utilise cette relation dans les trois autres équations, on trouve à chaque fois $\lambda_1 = \lambda_3$. On peut prendre par exemple $\lambda_3 = 1$, et on vérifie bien que $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (1, 2, 1)$ est solution, ou encore que $u_3 = -u_1 - 2u_2$.

2. *Donner la dimension et une base de*

   a) $F = \text{Vect}\{u_1, u_2, u_3\}$ *;*

   On a $F = \text{Vect}\{u_1, u_2\}$ car u_3 est combinaison linéaire de u_1 et u_2. Par ailleurs, la famille (u_1, u_2) est libre (car u_1 et u_2 ne sont pas proportionnels). Comme elle est aussi génératrice de F, c'est une base de F et $\dim F = 2$.

   b) $G = \text{Vect}\{v_1, v_2\}$

   La famille (v_1, v_2) est libre (car v_1 et v_2 ne sont pas proportionnels). Par hypothèse, la famille (v_1, v_2) engendre G, donc c'est une base de G et $\dim G = 2$.

3. *Donner les coordonnées de u_1, u_2 et u_3 dans la base obtenue au 2.a).*

   On a $u_1 = 1 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2$, $u_2 = 0 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2$ et $u_3 = (-1) \cdot u_1 + (-2) \cdot u_2$ donc, dans la base (u_1, u_2) les coordonnées sont $u_1(1, 0)$, $u_2(0, 1)$ et $u_3(-1, -2)$.

4. *Montrer que $F \cap G = \{0\}$.*

   Soit $w \in F \cap G$. Comme (u_1, u_2) est une base de F, et (v_1, v_2) une base de G, il existe $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ tels que $w = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2$ ce qui donne le système

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} \lambda_1 & - & \lambda_2 & - & \mu_1 & & & = & 0 \\ & & \lambda_2 & & & - & \mu_2 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & - & 2\mu_1 & & & = & 0 \\ -\lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & \mu_1 & - & 3\mu_2 & = & 0 \end{array}\right.$$

   Si on additionne la première et la quatrième équations, on trouve $\lambda_2 - 3\mu_2 = 0$. Mais la deuxième équation est $\lambda_2 - \mu_2 = 0$ et donc, $\lambda_2 = \mu_2 = 0$. Ensuite, de la première équation on déduit $\lambda_1 - \mu_1 = 0$ et de la troisième, $\lambda_1 - 2\mu_1 = 0$ ce qui implique $\lambda_1 = \mu_1 = 0$. Par conséquent, $\lambda_1 = \lambda_2 = \mu_1 = \mu_2 = 0$ et $w \in F \cap G$ si et seulement si $w = 0$.

5. *En déduire la dimension et une base de $F + G$.*

   D'après la formule de Grassmann,

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) = 2 + 2 - 0 = 4.$$

   Par ailleurs, puisque (u_1, u_2) est une base de F et (v_1, v_2) une base de G, $F+G$ est engendré par la famille (u_1, u_2, v_1, v_2) qui contient 4 éléments : cette famille est donc une base de $F+G$.

Exercice 3 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On se donne cinq vecteurs v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 de E. On suppose que les familles (v_1, v_2, v_3, v_4) et (v_4, v_5) sont libres. Enfin, on suppose que*

$$(\star) \qquad 5v_1 + 4v_2 + 3v_3 + 2v_4 + v_5 = 0.$$

Seules seront notées les réponses justifiées.

1. *La famille (v_1, v_2, v_3) est-elle libre ?*

   Toute famille extraite d'une famille libre est libre, donc (v_1, v_2, v_3) est libre.

2. *Donner la dimension et une base de*

   a) $F = \text{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}$ *;*

   La famille (v_1, v_2, v_3) étant libre (d'après 1) et génératrice de F (par hypothèse), c'est une base de F et $\dim F = 3$.

   b) $G = \text{Vect}\{v_4, v_5\}$ *;*

   La famille (v_4, v_5) étant libre (par hypothèse) et génératrice de G (par hypothèse), c'est une base de G et $\dim G = 2$.

   c) $F + G$.

   On a $F + G = \text{Vect}\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ car $F = \text{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}$ et $G = \text{Vect}\{v_4, v_5\}$. D'après la relation $(\star)$, v_5 est combinaison linéaire de v_1, v_2, v_3, v_4 donc $\text{Vect}\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} = \text{Vect}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Enfin, la famille (v_1, v_2, v_3, v_4) est libre par hypothèse, c'est donc une base de $F + G$ et $\dim(F + G) = 4$.

3. a) *Quelle est la dimension de $F \cap G$?*

D'après la formule de Grassmann,

$$\dim(F \cap G) = \dim F + \dim G - \dim(F + G) = 3 + 2 - 4 = 1.$$

b) *A partir de la relation $(\star)$, trouver un vecteur non nul qui appartient à $F \cap G$.*

On a

$$w = 5v_1 + 4v_2 + 3v_3 = -2v_4 - v_5 \in F \cap G.$$

En effet, w est combinaison linéaire de v_1, v_2, v_3 et appartient donc à F car (v_1, v_2, v_3) est une base de F. De même, w appartient à G car combinaison linéaire de v_4, v_5 et (v_4, v_5) est une base de G. Enfin, $w \neq 0$ car ses coordonnées dans la base (v_1, v_2, v_3) de F ne sont pas nulles.

c) *En déduire une base de $F \cap G$.*

Comme $\dim(F \cap G) = 1$, une base de $F \cap G$ est simplement un vecteur non nul de $F \cap G$. On peut prendre (w) comme base de $F \cap G$.