Espaces perfectoïdes et applications (d'après Scholze)

1 Introduction

Pour les corps locaux, on connaît il y a longue temps qu'une extension très ramifiées du corps local $\mathbb{Q}_p$ ressemble à s'y méprendre à un corps des séries formelles à coefficients dans son corps résiduel. Par exemple, considérons le corps $\mathbb{Q}_p(p^{1/p^\infty})$ en ajoutant à $\mathbb{Q}_p$ tous les racines p^n-ième de l'unité d'une part, et le corps $\mathbb{F}_p((t))$ des séries formelles à coefficients dans $\mathbb{F}_p$ d'autre part, on a l'observation fondamentale suivante:

Théorème. (Fontaine-Winterberger) Il y a un isomorphism canonique:

$$\mathrm{Gal}\left(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p\left(p^{1/p^\infty}\right)\right) \simeq \mathrm{Gal}\left(\overline{\mathbb{F}_p((t))}/\mathbb{F}_p((t))\right).$$

Ce phénomène a été utilisé en théorie de Hodge p-adique. Par exemple, en utilisant la classification des representations p-adique galoisiennes d'un corps en égale caractéristique positive, on peut classifier les représentations p-adiques galosiennes d'un corps p-adique de caractéristique mixte, en associant à une telle representation galoisienne de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ un (ϕ, Γ)-module. Cette technique de passer d'égale caractéristique positive à mixte caractérisque est systématisée par P. Schoze dans [6]. Suivant Scholze, un *corps perfectoïde* est un corps K, complet pour une valeur absolue non archimédienne non discrète à corps résiduel de caractéristique p tel que le Frobenius $x \mapsto x^p$ soit surjectif sur la réduction modulo p de l'anneau de ses entiers. Scholze introduit une catégorie d'espaces analytiques sur K, les *espaces perfectoïdes* sur K, et montre qu'elle est équivalente, via la *tilt*-construction, à la catégorie des espaces perfectoïdes sur K^b, le *tilt* de K, qui est d'ailleur un corps perfectoide *de caractéristique* $p > 0$. Cette équivalence respecte les morphismes étales. Ce résultat contient en particulier le théorème de presque pureté de Faltings, et en donne une preuve limpide. Comme applications de sa théorie, Scholze montre les résultats suivants:

- La conjecture monodromie-poids pour les variétés toriques en mixte caractéristique ([6]).
- Théorie de Hodge p-adique des variétés rigides analytiques sur les corps p-adiques: théorème de finitude de la cohomologie d'un système local sur le site étale d'une variété rigide analytique propre et lisse d'une part; l'analogue du théorème de comparaison entre la cohomologie de de Rham et la cohomologie étale p-adique pour les $\mathbb{Q}_p$-faisceaux lisses de de Rham ([7]) d'autre part.

D'autres références sont aussi liées à ce subjet, par exemple: [1], [2], [4] et [5]. Le but de ce groupe de travail est donc de comprendre, suivant Peter Scholze ([6], [7]), la notion d'espaces perfectoïdes, et ses applications à la conjecture monodromie-poids, et à la théorie de Hodge p-adique.

2 Proposition d'exposés

1. Introduction (Olivier Brinon). On pourra parler par exemple de:
   (a) théorème de Fontaine-Winterberger mentionné ci-dessus;
   (b) Corps perfectoïdes (§ 3 de [6]);
   (c) Un résumé des résults de [6] (e.g. § 1 de [6]) et de [7].
2. Introduction au monde presque mathématiques de Faltings, Gabber-Ramero (Olivier Brinon). Il s'agit d'introduire quelques notions de base du monde presque mathématiques. On pourra suivre § 4 de [6] pour les grandes lignes, et consulter le livre de Gabber-Ramero pour des preuves en détails.
3. Algèbres perfectoïdes (2 exposés de 1h30, Jilong Tong). Il s'agit de § 5 de [6]. Ce serait bien d'inclure aussi quelques détails sur les complexes cotangents utilisés ici.
4. Introduction aux espaces adiques de Huber (Dajano Tossici). On pourra suivre § 2 pour les grandes lignes de cet exposé. Ce serait bien de présenter en détails l'exemple 2.20 de [6]. Pour plus de détails de cette théorie de Huber, on pourra consulter les travaux originaux de Huber.
5. Espaces perfectoïdes: topologie analytique (2 exposés de 1h30: Nicola Mazzari). Il s'agit de § 6 de [6].
6. Topologie étale d'un espace perfectoïde (Jean Gillibert). C'est le § 7 de [6]. En particulier, on montrera le théorème de presque pureté de Faltings (théorème 7.9 de [6])
7. Introduction aux variétés toriques (Qing Liu). Il faut introduire les notions de base de variétés toriques, puis expliquer le comportement de variétés toriques avec la tilt-construction de Scholze. Là encore, on pourra suivre § 8 pour les grandes lignes, et les détails se trouvent ailleurs (voir la bibliographie de [6]).
8. Application à la conjecture monodromie-poids (2 exposés de 1h30: Nicola Mazzari). Dans un premier temps, on pourra d'abord définir la filtration de poids comme l'a faite dans Weil II, puis énoncer la conjecture monodromie-poids. Expliquer les cas connus avant Scholze, et puis essquisser la preuve de Deligne en égale caractéristique. Ensuite, dans le second exposé, on présentera la preuve de Scholze, qui lui permet de se ramener les cas des variétés toriques sur une corps de mixte caractéristique aux cas d'égale caractéristique prouvée par Deligne avant.
9. Application à la théorie de Hodge p-adique d'un espace rigide analytique (6 ou 7 exposés, programme à détailler plus tard). Il s'agit d'une deuxième application de la théorie d'espaces perfectoïdes.
10. D'autres travaux liés au sujet de ce groupe de travail....??

References

[1] F. Andreatta et A. Iovita, *Comparison isomorphisms for formal schemes.*

[2] O. Brinon, *Représentations p-adiques cristallines et de de Rham dans le cas relatif.* Mém. Soc. Math. France (N.S.) (112), 2008.

[3] J. M. Fontaine, *Espaces Perfectoïdes*, Séminaire Bourbaki, 1057, juin 2012.

[4] O. Gabber et L. Ramero, *Almost ring theory*, Lecture Notes in Mathematics (1800), 2003.

[5] K. Kedlaya et R. Liu, *Relative p-adic Hodge theory, I Fundations*, preprint 2011.

[6] P. Scholze, *Perfectoid spaces*, to appear in Publ. Math. IHES,

[7] P. Scholze, *p-adic Hodge theory for rigid-analytic varieties*, preprint Bonn.