Variétés de Shimura et leurs modèles canoniques

a2x

1 Introduction

Soit
$$\mathcal{H} := \{z \in \mathbb{C} | \mathrm{im}(z) > 0\}$$
le demi-plan supérieur, qui est muni naturellement d'une action du groupe de Lie $\mathbf{SL}_2(\mathbb{R})$:
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}.$$
On vérifie aisément que cette action est transitive, et le stabilisateur de $i \in \mathcal{H}$ est le sous-groupe compact $\mathbf{SO}_2$ de $\mathbf{SL}_2(\mathbb{R})$. On en déduit un difféomorphisme
$$\mathbf{SL}_2(\mathbb{R})/\mathbf{SO}_2 \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \mathbf{SO}_2 \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot i.$$

Soit $\Gamma \subset \mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})$ un *sous-groupe de congruence*, c'est-à-dire, un sous-groupe contenant un sous-groupe de congruence principal $\Gamma(N)$ de niveau N:
$$\Gamma(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{Z}) \,|\, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mod N \right\}.$$
Γ agit sur $\mathcal{H}$ via l'action de $\mathbf{SL}_2(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{H}$. Considérons
$$S_\Gamma^0 := \Gamma \backslash \mathcal{H}.$$
C'est une surface de Riemann connexe *non compact*, et on peut la compactifier en ajoutant un nombre fini de points:
$$S_\Gamma^0 \subset S_\Gamma := \Gamma \backslash \left(\mathcal{H} \coprod \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}) \right).$$
En particulier S_Γ est une surface de Riemann connexe compacte, donc elle admet naturellement une structure de courbe algébrique connexe propre lisse sur $\mathbb{C}$. Par conséquent, la surface de Riemenn S_Γ^0, étant un ouvert de S_Γ, est également une courbe algébrique sur $\mathbb{C}$.

La question suivante est si la courbe S_Γ (et donc S_Γ^0) peut être définie sur un *corps de nombres*. En général, pour une courbe algébrique sur $\mathbb{C}$, on a ni l'existence, ni l'unicité de modèles de la courbe sur un corps de nombres. Mais pour les courbes modulaires S_Γ^0, S_Γ, on peut montrer qu'elles admettent des modèles sur un corps de nombres. En effet, si l'on considère une version non-connexe de S_Γ, qui est un union fini de S_{Γ_i}'s, on peut même trouver un modèle *canonique* sur $\mathbb{Q}$. Pour construire les modèles canoniques, l'idée est d'interpréter la courbe S^0_Γ comme un certain espace de modules de courbes elliptiques (munissant des structures de niveau convenables).

Les variétés de Shimura sont des analogues en dimension supérieure des courbes modulaires S_Γ ci-dessus. Le but de ce groupe de travail (au moins pour la premire partie) est de comprendre la définition des variétés de Shimura (due à Deligne), et la construction des modèles canoniques pour certaines variétés de Shimura. Les références fondamentales sont bien sûr les deux articles difficiles de Deligne [1] [2], mais les notes de Milne ([5]) sembleraient plus raisonnables pour ce groupe de travail.

2 Proposition d'exposés

La proposition d'exposés ci-dessus est largement inspirée par le programme d'un groupe de travail fait à Université de Heldelberg: `http://www.mathi.uni-heidelberg.de/fg-sga/docs/SS14_Shimura_varieties.pdf`. Les orateurs sont invités à le consulter pour la contenue et les références plus précises de chaque exposé.

1. Préparations sur les groupes algébriques linéaires: il faut au moins arriver à la classification des groupes algébriques semi-simples sur $\mathbb{R}$, et donner la définition de groupes réductifs (Alan).

2. Espaces symétriques hermitiens (chapitre 1 de [5], Liu).

3. Variétés localement symétriques et leurs compatification (chapitre 3 de [5], Eduardo)

4. Variation de structures de Hodge(chapitre 2 de [5]) (Baptiste).

5. Adèles et variétés de Shimura connexes (chapitre 4 de [5], Nicola)

6. Variétés de Shimura et tores (chapitre 5 de [5], Dajano).

7. Variétés modulaire de Siegel (chapitre 6 de [5], Olivier)

8. Divers types de variétés de Shimura: de Hodge, PEL, abélien etc. (chapitre 7-9 de [5], Jilong)

9. Variétés abéliennes de type CM (chapitre 10-11 de [5], Pascal).

10. Modèles canoniques de variétés de Shimura (chapitre 12-14 de [5], Jilong)

11. Modèles canoniques d'espaces de Siegel et de courbes modulaires ([4] et chapitre 14 de [5], Nicola)

12. Exemple: surfaces de Picard. La référence est [3] (Alexey).

13. Exemple: Courbes de Shimura (Pierre).

14. Aspect algorithme/Calcul (Damien).

References

[1] P. Deligne, *Travaux de Shimura*, in Séminaire Bourbaki, 23ème année (1970/71), disponible ici: `http://archive.numdam.org/article/SB_1970-1971__13__123_0.pdf`

[2] P. Deligne, *Variétés de Shimura, interprétation modulaire, et techniques de construction de modèles canoniques*, in *Automorphic forms, representations, and L-functions*. article disponible ici: `http://publications.ias.edu/sites/default/files/34_VarietesdeShimura.pdf`

[3] B. Gordon; *Canonical models of Picard modular surface*, in *The zeta functions of Picard modular surfaces*; R. Langlands, D. Ramakrishnan (Eds.); 1-19; CRM, Univ,, Montréal

[4] J. Milne, *Canonical models of Shimura curves*, disponible ici : `http://www.jmilne.org/math/articles/2003a.pdf`

[5] J. Milne, *Introduction to Shimura varieties*, disponible ici: `http://www.jmilne.org/math/xnotes/svi.pdf`