Devoir maison n° 3

Exercice 1
Soient λ un réel, et $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$F : (x,y) \mapsto (-x+2y, 2x-4y, \lambda x + (\lambda+3)y).$$

1. Donner la matrice de F dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer le rang de F en fonction de λ.
3. Déterminer $\mathrm{Im}(F)$ et $\ker(F)$ lorsque $\lambda = -1$.

Exercice 2
Soit

$$\begin{array}{cccc} F : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (-x-6y+6z, 5y-6z, 3y-4z) \end{array}$$

une application linéaire. On désigne par $\mathfrak{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Donner la matrice de F dans la base $\mathfrak{B}$, et calculer son rang.
2. Soient $v_1 = (3,-2,-2), v_2 = (-1,1,1), v_2 = (2,-2,-1)$.
   (2.a) Montrer que $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. On désignera cette base par $\mathfrak{B}'$.
   (2.b) Donner les matrices de passage de $\mathfrak{B}$ à $\mathfrak{B}'$, et de $\mathfrak{B}'$ à $\mathfrak{B}$.
   (2.c) Calculer $F(v_1), F(v_2), F(v_3)$. En déduire la matrice de F dans la base $\mathfrak{B}'$.

Exercice 3
Soit E l'espace vectoriel des polynômes dans $\mathbb{R}[X]$ de degré $\leqslant 3$. On note $\mathfrak{B} = \{1, X, X^2, X^3\}$ la base canonique de E. Soient a un réel, et $f : E \longrightarrow E$ l'application définie par

$$f : P(X) \mapsto (X-a)P'(X).$$

1. Montrer que f est une application linéaire. Donner sa matrice dans la base canonique $\mathfrak{B}$.
2. Déterminer $\ker(f)$.
3. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \{P \in E,\ P(a) = 0\}$.
4. Montrer que la famille $\{1, (X-a), (X-a)^2, (X-a)^3\}$ est une base de E, on notera cette base $\mathfrak{B}'$.
5. Donner la matrice de passage de $\mathfrak{B}$ à $\mathfrak{B}'$, et de $\mathfrak{B}'$ à $\mathfrak{B}$.
6. Donner la matrice de f dans la base $\mathfrak{B}'$.

Exercice 4
Dans tout l'exercice $\mathbb{K}$ désigne un corps et E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.
I) Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E tels que $F_1 \oplus F_2 = E$. Pour tout $u \in E$ il existe un unique couple $(u_1, u_2) \in F_1 \times F_2$ tel que $u = u_1 + u_2$. On peut donc définir deux applications : $p_1 \colon E \to E$ par $p_1(u) = u_1$ et $p_2 \colon E \to E$ par $p_2(u) = u_2$. On dit que p_1 est la projection de E sur F_1 parallèlement à F_2 et que p_2 est la projection de E sur F_2 parallèlement à F_1.

1) Démontrer que p_1 et p_2 sont des applications linéaires.
2) Déterminer le noyau et l'image de p_1 et p_2.
3) Déterminer $p_1 \circ p_1$, $p_2 \circ p_2$, $p_1 \circ p_2$, $p_2 \circ p_1$, $p_1 + p_2$.

II) Soit $p \colon E \to E$ une application linéaire telle que $p \circ p = p$.
4) Prouver que $\mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Ker}(p) = \{\vec{0}\}$.
5) Prouver que $\mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p) = E$.
6) Prouver qu'il existe deux sous-espaces vectoriels A_1 et A_2 tels que $A_1 \oplus A_2 = E$ et que p soit la projection de E sur A_1 parallèlement à A_2.

III) On suppose que E est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère les sous-ensembles de E suivants : $F_1 = \{f \in E \ : \ f \text{ paire}\}$ et $F_2 = \{f \in E \ : \ f \text{ impaire}\}$.
7) Prouver que F_1 et F_2 sont des sous-espaces vectoriels de E.
8) Prouver que $F_1 \oplus F_2 = E$.
9) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, a_1, a_2, \dots a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, on considère la fonction polynomiale $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$. Que valent $p_1(f)$ et $p_2(f)$.