DS 1

Ex 1

on utilise la division euclidienne pour calculer le pgcd

$$x^5+x^4-x^3-2x-1 = (3x^4+2x^3+x^2+2x-2)\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{9}\right) - \frac{14}{9}x^3 - \frac{7}{9}x^2 - \frac{14}{9}x - \frac{7}{9}$$

$$3x^4+2x^3+x^2+2x-2 = \left(-\frac{14}{9}x^3-\frac{7}{9}x^2-\frac{14x}{9}-\frac{7}{9}\right)\cdot\left(-\frac{27}{14}x-\frac{5}{28}\right) - \frac{9}{4}x^2 - \frac{9}{4}$$

$$-\frac{14}{9}x^3 - \frac{7}{9}x^2 - \frac{14x}{9} - \frac{7}{9} = \left(-\frac{9}{4}x^2-\frac{9}{4}\right)\left(\frac{56}{81}x+\frac{28}{81}\right) + 0$$

Donc un pgcd de $x^5+x^4-x^3-2x-1$ et $3x^4+2x^3+x^2+2x-2$

est x^2+1.

Ex 2

on effectue d'abord la division euclidienne de $f(x) := x^4+3x^2+1$

par $g(x) = x^2+ax+1$

$$\begin{array}{l|l} x^4 + 0x^3 + 3x^2 + 0x + 1 & x^2+ax+1 \\ \hline -x^4 - ax^3 - x^2 & x^2 - ax + (2+a^2) \\ \hline -ax^3 + 2x^2 + 0x & \\ ax^3 + a^2x^2 + ax & \\ \hline (2+a^2)x^2 + ax + 1 & \\ -(2+a^2)x^2 - (2a+a^3)x - (2+a^2) & \\ \hline (-a^3-a)x + (-1-a^2) & \end{array}$$

Donc $f(x) = g(x)\cdot\left(x^2-ax+(2+a^2)\right) + (-a^3-a)x + (-1-a^2)$

Donc $g(x) \mid f(x)$

$\Leftrightarrow$ le reste $(-a^3-a)\,X + (-a^2-1) = 0.$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a^3-a=0 \\ -a^2-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow a = i \text{ ou } -i$$

Donc les polynômes de la forme $x^2+ax+1 \in \mathbb{C}[x]$ qui divisent x^4+3x^2+1 sont

$$X^2+iX+1 \quad , \quad X^2-iX+1$$

Ex 3

Dém : 1) $\Rightarrow$ 2), comme $f(x)$ et $g(x)$ ne sont pas premiers entre eux,

il existe un polynôme $d(x) \in \mathbb{R}[x]$, de degré >0

tq $d(x) \mid f(x)$, et $d(x) \mid g(x)$

posons $u(x) := \dfrac{g(x)}{d(x)}$, $v(x) = -\dfrac{f(x)}{d(x)}$

alors $\deg(u) = \deg(g) - \deg(d) < \deg(g)$

$\deg(v) = \deg(f) - \deg(d) < \deg(f)$

et on a

$$u(x)f(x) + v(x)\,g(x)$$

$$= \frac{1}{d(x)}\big(g(x)\,f(x) - f(x)\,g(x)\big) = 0.$$

d'où 2)

2) $\Rightarrow$ 1).

notons $\delta(x) = \text{pgcd}(u(x), g(x))$

comme $u(x)$ et $g(x)$ non nul, et $\deg(u(x)) < \deg(g)$

$\Rightarrow 0 \leq \deg \delta(x) < \deg(g(x))$

posons $g_1(x) = \dfrac{g(x)}{\delta(x)} \in \mathbb{R}[x]$

$u_1(x) = \dfrac{u(x)}{\delta(x)}$.

Donc $\text{pgcd}(g_1(x), u_1(x)) = 1$

et on a $\deg(g_1(x)) = \deg(g(x)) - \deg(\delta(x)) > 0$

Donc $\dfrac{1}{\delta(x)} \left(u(x) f(x) + v(x) g(x) \right) = 0$

$\Rightarrow u_1(x) f(x) + v(x) g_1(x) = 0$.

maintenant, comme $g_1(x)$ et $u_1(x)$ sont premiers entre eux, et $g_1(x) \mid u_1(x) f(x)$

~~Lemme de Gauss~~ $\Rightarrow g_1(x) \mid f(x)$

or par définition, $g_1(x) \delta(x) = g(x) \Rightarrow g_1(x) \mid g(x)$

Donc $g_1(x) \mid \text{pgcd}(f(x), g(x))$

comme $\deg(g_1(x)) > 0$

ceci entraîne que $f(x)$ et $g(x)$ ne sont pas premiers entre eux.

Ex 4.

Il faut vérifier l'assertion suivante. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ t.q $f(\alpha)=0$,

alors on a $f'(\alpha) \neq 0$.

Remarquons d'abord que $f'(x) = \left(1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)' = 1+x+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$

On raisonne par l'absurde.

- Supposons $\exists\, \alpha \in \mathbb{C}$ t.q. $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$

$$\Rightarrow \quad f(\alpha) - f'(\alpha) = 1+\frac{\alpha}{1}+\frac{\alpha^2}{2!}+\cdots+\frac{\alpha^n}{n!} - \left(1+\alpha+\cdots+\frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!}\right)$$

$$= \frac{\alpha^n}{n!} = 0$$

comme $n \geq 1 \Rightarrow \alpha = 0$.

mais on peut vérifier $f(0) = 1 \neq 0$

donc α n'est pas racine de f, une contradiction

Donc on a

$$f(\alpha)=0 \Rightarrow f'(\alpha) = 0$$

Ceci signifie que le polynôme $f(x)$ n'a pas de racine multiple.

Ex 5.

méthode 1. on va utiliser la formule du binôme.

formule du binôme

$$(X+Y)^n = X^n + \binom{n}{1}X^{n-1}Y + \cdots + \binom{n}{i}X^{n-i}Y^i + \cdots + \binom{n}{n-1}XY^{n-1} + Y^n$$

Donc, en particulier, on a

$$(*)\left\{\begin{aligned} 0 = (1-1)^n &= 1^n + \binom{n}{1}\cdot 1\cdot(-1) + \cdots + \binom{n}{i}(-1)^i + \cdots + \binom{n}{n-1}(-1)^{n-1} \\ &\quad + \binom{n}{n}\cdot(-1)^n \\ &= 1 - \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdots + (-1)^i\frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-i+1)}{i!} + \cdots + (-1)^n\frac{n(n-1)\cdot 1}{n!} \\ &= g(n). \end{aligned}\right.$$

pour les $m \in \mathbb{Z}$ $1 \leq m < n$, on a

$$g(m) = 1 - \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{2} + \cdots + (-1)^m \frac{m(m-1)\cdots(m-(m-1))}{m!}$$

$$+ \underbrace{(-1)^{m+1} \frac{m(m-1)\cdots(m-(m-1))\overbrace{(m-m)}^{0}}{(m+1)!} + \cdots + (-1)^n \frac{m(m-1)\cdots(m-(m-1))\overbrace{(m-m)}^{0}\cdots(m-(n+1))}{n!}}_{=0}$$

$$= 1 - \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{2} + \cdots + (-1)^m \frac{m(m-1)\cdots(m-(m-1))}{m!}$$

$$= 0$$

pour la dernière égalité, on applique à nouveau la formule $(*)$

dans le cas $n = m$

d'où $g(1) = g(2) = \cdots = g(n) = 0$

b). comme $g(x)$ est un polynôme de degré n, et

la question a) $\Rightarrow$ $1, 2, 3, \ldots, n$ sont n racines distinctes de $g(x)$

Donc $(x-1)(x-2)\cdots(x-n) \mid g(x)$

$\Rightarrow \exists\ Q(x) \in \mathbb{R}[X]$ t.q.

$$g(x) = (x-1)(x-2)\cdots(x-n) \cdot Q(x)$$

le polynôme $Q(x)$ est forcément une constante λ pour la raison de degré

$$\Rightarrow \quad g(x) = \lambda (x-1)(x-2)\cdots(x-n)$$

en remplaçant x par 0, on obtient

$$1 = g(0) = \lambda \cdot (-1)^n \cdot n! \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{(-1)^n}{n!}$$

d'où $g(x) = \dfrac{(-1)^n}{n!}(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$.

méthode 2 — on va d'abord démontrer b), et puis en déduire la question a)

notons $g_n(x) = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x(x-1)}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x(x-1)\cdots(x-(n-1))}{n!}$

on raisonne par récurrence sur n pour montrer $g_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!}(x-1)\cdots(x-n)$

Cas $n=1$ $\quad g_1(x) = 1 - \frac{x}{1} = 1 - x = \frac{(-1)^1}{1!}(x-1)$

Donc le cas où $n=1$ est O.K.

supposons maintenant l'assertion a été vérifiée pour $g_n(x)$ $(n \geq 1)$

et montrons que elle est également vérifiée pour $g_{n+1}(x)$

par définition.

$$g_{n+1}(x) = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x(x-1)}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!}$$
$$+ (-1)^{n+1} \frac{x(x-1)\cdots(x-(n+1)+1)}{(n+1)!}$$

$$g_n(x) = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x(x-1)}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!}$$

donc $g_{n+1}(x) = g_n(x) + (-1)^{n+1} \frac{x(x-1)\cdots(x-n)}{(n+1)!}$

par l'hypothèse de récurrence, on a

$$g_n(x) = \frac{(-1)^n (x-1)\cdots(x-n)}{n!}$$

$$\Rightarrow g_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n (x-1)\cdots(x-n)}{n!} + \frac{(-1)^{n+1} x(x-1)\cdots(x-n)}{(n+1)!}$$

$$= \left[1 + \frac{-x}{n+1}\right] \cdot \left(\frac{(-1)^n (x-1)\cdots(x-n)}{n!}\right)$$

$$= -\frac{(x-(n+1))}{n+1} \cdot \frac{(-1)^n (x-1)\cdots(x-n)}{n!}$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}(x-1)(x-2)\cdots(x-n)(x-(n+1))$$

donc l'assertion est aussi vérifiée pour g_{n+1}

d'où b).

b il nous reste de vérifier a).

mais maintenant, ~~il~~ c'est trivial. puisque on a

$$g(x) = g_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!}(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$$

donc $g(1) = g(2) = \cdots = g(n) = 0.$