DS 2

ex 1. 1). on a

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ -2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7 \\ -3x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9 \\ -4x_1 + \lambda x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_3 + 4x_4 = 6 \\ (\lambda-8)x_2 - 3x_3 - 6x_4 = -9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ x_3 + 2x_4 = 3 \\ (\lambda-8)x_2 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

1er cas : $\lambda \neq 8 \Rightarrow x_2 = 0$ donc $(*) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$$

d'où l'ensemble des solutions

$$\begin{cases} x_1 = 3x_3 + 4x_4 - 5 = 3(3-2r) + 4r - 5 = 4 - 2r \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 3 - 2r \\ x_4 = r \in \mathbb{R} \end{cases}$$

2er cas $\lambda = 8$, donc on a

$$\begin{cases} x_1 = 4 - 2r + 2s \\ x_2 = s \in \mathbb{R} \\ x_3 = 3 - 2r \\ x_4 = r \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(2). système homogène associé.

$$(E_0): \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 0 \\ -3x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 0 \\ -4x_1 + \lambda x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_3 + 2x_4 = 0 \\ (\lambda - 8)x_2 = 0 \end{cases}$$

$\underline{1^{er}\text{ cas}}$. $\lambda \neq 8$

$\Rightarrow$ l'ensemble des solutions

$$S_{E_0} = \{(-2r, 0, -2r, r) \;/\; r \in \mathbb{R}\} = \{r.(-2, 0, -2, 1) \;/\; r \in \mathbb{R}\}$$

qui est donc de dim 1, avec une base donnée par

$$\{(-2, 0, -2, 1)\}$$

$\underline{2^{er}\text{ cas}}$. $\lambda = 8$

$$S_{E_0} = \{(-2r+2s, s, -2r, r) \;/\; r, s \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{r(-2, 0, -2, 1) + s(2, 1, 0, 0) \;/\; r, s \in \mathbb{R}\}$$

$$= \langle (-2, 0, -2, 1), (2, 1, 0, 0) \rangle$$

On peut vérifier que les deux vecteurs $(-2, 0, -2, 1)$ et

$(+2, 1, 0, 0)$ ne sont pas colinéaires

donc $\{(2, 0, -2, 1), (2, 1, 0, 0)\}$ est libre

$\Rightarrow$ S_{E_0} est de dim. 2, avec une base donnée par

$$\{(-2, 0, -2, 1), (2, 1, 0, 0)\}$$

ex 2.

1) on considère la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 7 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

qui est ligne équivalente à

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 7 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & -7 & 1 \end{pmatrix}$$

donc $\langle (2, 2, 7, -1), (3, -1, 2, 4), (1, 1, 3, 1) \rangle$

$= \langle (1, 1, 3, 1), (0, 0, 1, -3), (0, -4, -7, 1) \rangle$

donc $\{(2, 2, 7, -1), (3, -1, 2, 4), (1, 1, 3, 1)\}$ est libre

$\Leftrightarrow$ le ss-espace $\langle (2, 2, 7, -1), (3, -1, 2, 4), (1, 1, 3, 1) \rangle$ est de dim 3

$\Leftrightarrow$ $\{(1, 1, 3, 1), (0, 0, 1, -3), (0, -4, -7, 1)\}$ est libre.

mq cette dernière assertion est vraie !

en fait. Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ t.q.

$a \cdot (1, 1, 3, 1) + b(0, 0, 1, -3) + c(0, -4, -7, 1)$

$= (0, 0, 0, 0)$

on voit facilement que $a = b = c = 0$, d'où le fait que la famille $\{(1, 1, 3, 1), (0, 0, 1, -3), (0, -4, -7, 1)\}$ est libre

donc la famille $\{(2, 2, 7, -1), (3, -1, 2, 4), (1, 1, 3, 1)\}$ est libre, on peut la completer en une base de la manière suivante:

$\{(2, 2, 7, -1), (3, -1, 2, 4), (1, 1, 3, 1), (0, 0, 0, 1)\}$

2). considérons la matrice.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 5 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

qui est ligne équivalente à

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $\langle (1,1,1\ 1,0), (0,0,1,1,\frac{1}{2}) \rangle$

$= \langle u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 \rangle$

par suit $\dim \langle u_1 u_2, u_3, u_4, u_5 \rangle = 2$

donc la famille $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ est liée.

et une base de $\langle u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 \rangle$ est donnée par

$$\left\{ (1,1,1,1,0), (0,0,1,1,\tfrac{1}{2}) \right\}$$

ex 3

1). remarquons d'abord que si $\alpha \in \mathbb{C}$ est racine de f

on a $\alpha \neq 0$

donc $0 = f(\alpha) = \alpha^4 - 3\alpha^3 + \frac{9}{2}\alpha^2 - 3\alpha + 1$

$$= \alpha^4\left(1 - 3\frac{\alpha^3}{\alpha^4} + \frac{9}{2}\frac{\alpha^2}{\alpha^4} - 3\frac{\alpha}{\alpha^4} + \frac{1}{\alpha^4}\right)$$

$$= \alpha^4\left(1 - 3\left(\frac{1}{\alpha}\right) + \frac{9}{2}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^4\right)$$

par suit

$$0 = 1 - 3\left(\frac{1}{\alpha}\right) + \frac{9}{2}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 + \left(\frac{1}{\alpha^4}\right) = f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

d'où (1)

2) vérification directe.

3) (1) + (2) $\Rightarrow$ $\frac{1}{1+i} = \frac{1}{2}(1-i)$ est une solution de $f(x)$.

or $f(x)$ est à coefficients réels

$\Rightarrow$ si $\alpha \in \mathbb{C}$ est racine de f, $\bar{\alpha}$ l'est aussi

~~d'où~~ par conséquent,

$1+i$, $1-i$, $\frac{1}{2}(1-i)$, $\frac{1}{2}(1+i)$

sont 4 racines de $f(x)$

or $\deg(f) = 4$

$$\Rightarrow f(x) = \left(X-(1+i)\right)\left(X-(1-i)\right)\left(X-\frac{1}{2}(1-i)\right)\left(X-\frac{1}{2}(1+i)\right)$$

4) $$f(x) = \left[(X-(1+i))(X-(1-i))\right]\cdot\left[(X-\frac{1}{2}(1-i))(X-\frac{1}{2}(1+i))\right]$$

$$= (X^2-2X+2)\cdot\left(X^2-X+\frac{1}{2}\right).$$

ex4. soit $\alpha.\ \beta.\ \gamma$ les trois racines de $f(x) = x^3 - 7x + \lambda$

on a donc
$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 & (1) \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma = -7 & (2) \\ \alpha\beta\gamma = \lambda & (3) \end{cases}$$

~~Peop~~ Par symétrie, on peut supposer $\alpha = 2\beta$

donc $(1) \Rightarrow \gamma = -3\beta$

$(2) \Rightarrow \alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma$

$= 2\beta\cdot\beta + \beta\cdot(-3\beta) + 2\beta\cdot(-3\beta)$

$= 2\beta^2 - 3\beta^2 - 6\beta^2 = -7\beta^2 = -7$

$\Rightarrow \beta = \pm 1$

donc * Si $\beta = 1$, on a $\alpha = 2$ $\gamma = -3$

donc $\lambda = 6$

* Si $\beta = -1$ on a $\alpha = -2$, $\gamma = 3$

donc $\lambda = -6$