MHT 201. Structures algébriques

DS no.2, le 27 avril 2011

Durée 1h30, Documents et calculettes interdits

Exercice 1. 1) Résoudre le système d'équations linéaires:

$$(*)\qquad \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ -2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7 \\ -3x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9 \\ -4x_1 + \lambda x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 11 \end{cases}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

2) Donner une base et déterminer la dimension de l'espace des solutions du système homogène associé au système (*) selon les valeurs de λ.

Exercice 2. 1) Montrer que le système des vecteurs $v_1 = (2, 2, 7, -1)$, $v_2 = (3, -1, 2, 4)$ et $v_3 = (1, 1, 3, 1)$ est libre et le compléter en une base de $\mathbb{R}^4$.

2) a) Montrer que le système des vecteurs $u_1 = (1, 1, 1, 1, 0)$, $u_2 = (1, 1, -1, -1, -1)$, $u_3 = (2, 2, 0, 0, -1)$, $u_4 = (1, 1, 5, 5, 2)$ et $u_5 = (1, -1, -1, 0, 0)$ est lié.

b) Donner une base et la dimension de $< u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 >$.

Exercice 3. Soit le polynôme $f(X) = X^4 - 3X^3 + \frac{9}{2}X^2 - 3X + 1$.

1) Montrer que si $\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine de $f(X)$, alors $1/\alpha$ l'est aussi.

2) Vérifier que $1 + i$ est une racine de $f(X)$.

3) Déterminer la factorisation de $f(X)$ en produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{C}$.

4) Déterminer la factorisation de $f(X)$ en produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\lambda \in \mathbb{C}$ pour que l'équation $X^3 - 7X + \lambda = 0$ admette une solution qui soit le double d'une autre et résoudre alors l'équation.