MHT 201, Test 1 (2 exos, 30 mins)

1 - Soient k un coprs, et $f, g \in k[X]$ deux polynômes non nuls. On note dans la suite (f, g) un PGCD de f et g.

a) Les assertions sont vraies ou fausses ? Il faut justifier la réponse si c'est vraie, ou donner un contre exemple si c'est fausse.

(i) Il existe $U, V \in k[X]$ tels que $Uf + Vg = 1 \Rightarrow (f, g) = 1$? ☒ vrai ☐ faux

En fait, soit $d \in k[X]$ un pgcd de f et g, on a $d|f$ et $d|g$. Compte tenu de l'égalité $Uf+Vg = 1$, on en déduit que $d|1$. Ceci entraîne que les deux polynômes f et g sont premiers entre eux.

(ii) [1] Soit $d \in k[X]$ non nul, tel qu'il existe $U, V \in k[X]$ vérifiant $Uf + Vg = d \Rightarrow (f, g) = d$?
☐ vrai ☒ faux

On peut prendre par exemple $f(X) = X$, $g(X) = X + 1$, et $d(X) = 2X + 1$. On a alors $Uf + Vg = d$ avec $U = V = 1 \in k[X]$, mais $(f, g) = 1 \neq d$.

(iii) Soit $h \in k[X]$ non nul. Alors $h|fg \Rightarrow$ ou bien $h|f$ ou bien $h|g$? ☐ vrai ☒ faux

On peut prendre par exemple $f(X) = g(X) = X$, et $h(X) = X^2$. On a alors $h|fg$, mais $h \nmid f$, $h \nmid g$.

(b) Soient $U, V, d \in k[X]$ tels que $(U, V) = d$, et que $Uf + Vg = d$. Montrer que f et g sont premiers entre eux.

Preuve : *Comme $d = (U, V)$, posons $U_1 = U/d$, $V_1 = V/d$ les deux polynômes. On a alors $(U_1, V_1) = 1$, et*

$$U_1 f + V_1 g = 1,$$

d'où le fait que f et g sont premiers entre eux. ☐

2 - On considère les deux polynômes réels suivants :

$$f(X) = X^4 + X^3 + 5X^2 + 4X + 4, \qquad g(X) = X^4 + 5X^2 + 4.$$

a) Calculer un PGCD $d = d(X)$ de f et g en utilisant l'algorithme d'Euclide. Puis trouver deux polynômes $U, V \in \mathbb{R}[X]$ tels que $Uf + Vg = d$.

b) Trouver une décomposition de f en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, puis dans $\mathbb{C}[X]$.

Corrigé : a) On va utiliser l'algorithme d'Euclide pour trouver un pgcd de f et g :

$$\begin{array}{rcl} f(X) & = & g(X) + X^3 + 4X \\ g(X) & = & X \cdot (X^3 + 4X) + X^2 + 4 \\ X^3 + 4X & = & X \cdot (X^2 + 4) + 0 \end{array}$$

Donc, le polynôme $X^2 + 4$ est un pgcd de f et g. Pour obtenir l'indentié de Bézout, on a

$$\begin{array}{rcl} X^2 + 4 & = & g(X) - X \cdot (X^3 + 4X) \\ & = & g(X) - X \cdot (f(X) - g(X)) \\ & = & -X \cdot f(X) + (X + 1) \cdot g(X). \end{array}$$

D'où l'égalité cherchée avec $U(X) = -X$, et $V(X) = X + 1$.

b) D'après a), on a $X^2+4|f(X)$. En utilisant la division euclidienne de f par X^2+4, on trouve

$$f(X) = (X^2 + 4)(X^2 + X + 1). \qquad (1)$$

1. version modifiée compte tenu des remarques d'étudiants

Puisque ces deux facteurs de degré 2 n'ont pas de recine dans $\mathbb{R}$, on en déduit que ces deux facteurs sont irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$. Autrement-dit, la formule (1) nons donne déjà la décomposition de $f(X)$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$. Dans $\mathbb{C}[X]$, on a alors

$$f(X) = (X^2+4)(X^2+X+1) = (X+2i)\,(X-2i)\left(X - \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(X - \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right).$$