MHT201

Quelques indications de TD 11

Exo. 1. (1) Par définition, F est l'ensemble des solutions du système suivant

$$\begin{cases} x_1 - \sqrt{3}x_2 + x_3 - 2x_4 & = 0 \\ \qquad\quad x_2 - x_3 \qquad + x_5 & = 0, \end{cases}$$

donc on a

$$F = \{(a, b, 2c + \sqrt{3}b - a, c, 2c + (\sqrt{3} - 1)b - a) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}. \qquad (*)$$

Notons $u_1 = \{1, 0, -1, 0, -1\}$ (c-a-d, posons $a = 1$, $b = c = 0$), $u_2 = (0, 1, \sqrt{3}, 0, \sqrt{3} - 1)$ (c-à-d, posons $a = c = 0$, $b = 1$), et $u_3 = (0, 0, 2, 1, 2)$ (c-à-d, posons $a = b = 0$, $c = 1$). D'après $(*)$, ces trois vecteurs engendrent F. On peut vérifier aussi qu'ils sont linéairement indépendants. Donc la famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de F.
(2) Montrons d'abord que $F+G = \mathbb{R}^5$. Puisque $F+G = \mathrm{Vect}\{u_1, u_2, u_3, v, w\}$, on considère la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} & 0 & \sqrt{3}-1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui est ligne-équivalente à

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où le fait $F+G = \mathbb{R}^5$. Pour completer la preuve, il nous faut encore vérifier $F \cap G = \{0\}$. Soit $x \in F \cap G$. D'après $(*)$, il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$x = (a, b, 2c + \sqrt{3}b - a, c, 2c + (\sqrt{3} - 1)b - a).$$

Or $x \in G$, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$x = \lambda v + \mu w = (0, 0, \lambda, 0, \mu).$$

D'où une égalité :

$$x = (a, b, 2c + \sqrt{3}b - a, c, 2c + (\sqrt{3} - 1)b - a) = (0, 0, \lambda, 0, \mu).$$

Par suite $a = b = c = \lambda = \mu = 0$. Donc $x = 0$. Il en résulte que $F \cap G = \{0\}$, d'où le résultat.

Exo. 2. (1) Supposons d'abord $\ker(u) = \ker(u^2)$, et montrons $\ker(u) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0\}$. Quelque soit $x \in \ker(u) \cap \mathrm{Im}(u)$, il existe $y \in E$ tel que $x = uy$ (car $x \in \mathrm{Im}(u)$). Or $x \in \ker(u)$, on a $u(x) = u(u(y)) = 0$, d'où $y \in \ker(u^2) = \ker(u)$. Par conséquent, on a $x = u(y) = 0$. Réciproquement, supposons qu'on a $\ker(u) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0\}$, et montrons $\ker(u) = \ker(u^2)$. D'abord, on a toujours $\ker(u) \subset \ker(u^2)$. Soit maintenant $x \in \ker(u^2)$, c'est-à-dire $u(u(x)) = 0$. Par suite $u(x) \in \ker(u) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0\}$, donc $u(x = 0)$. Ceci implique donc $\ker(u^2) \subset \ker(u)$. D'où $\ker(u) = \ker(u^2)$.
(2) "$\Rightarrow$" Quelque soit $x \in E$, $u(x) \in \mathrm{Im}(u)$. Comme $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(u^2)$, il existe $y \in E$ tel que $u(x) = u^2(y) = u(u(y))$. Donc $u(x - u(y)) = 0$, c'est-à-dire $z := x - u(y) \in \ker(u)$. D'où $x = u(y) + z \in \mathrm{Im}(u) + \ker(u)$. Réciproquement, puisque on a toujours $\mathrm{Im}(u^2) \subset \mathrm{Im}(u)$, il suffit de vérifier $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Im}(u^2)$. Soit $x \in \mathrm{Im}(u)$, il existe donc $y \in E$ tel que $x = u(y)$. Or comme $E = \mathrm{Im}(u) + \ker(u)$, l'élément $y \in E$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$y = a + b \quad \text{avec} \quad a \in \mathrm{Im}(u), \quad b \in \ker(u).$$

Donc $x = u(y) = u(a) \in \mathrm{Im}(u^2)$. D'où la conclusion.

Exo. 3. (1) Montrons d'abord que u est injectif, c'est-à-dire $\ker(u) = \{0\}$. Soit $x \in E$ tel que $u(x) = 0$. Comme $u^2 + u - 6\mathrm{id}_E = 0$, on a

$$0 = u(u(x)) + u(x) - 6x = -6x,$$

d'où $x = 0$. Donc u est injectif. Il est aussi surjectif, en effet, quelque soit $y \in E$, on a

$$0 = u(u(y)) + u(y) - 6y = u(u(y) + y) - 6y.$$

D'où $6y = u(u(y) + y)$, donc

$$y = u\left(\frac{1}{6}(u(y) + y)\right) \in \mathrm{Im}(u)$$

Donc u est surjectif. Par suite, u est bijectif, et on a $u^{-1} = \frac{1}{6}(u + \mathrm{id}_E)$.

(2) Comme V est engendré par 2 éléments, il est de dimension ≤ 2. Et on a $\dim(V) = 1$ si et seulement si les deux éléments u et id_E sont co-linéaires, autrement-dit, il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u = \lambda \cdot \mathrm{id}_E$. Par suite,

$$0 = u^2 + u - 6\mathrm{id}_E = \lambda^2\mathrm{id}_E + \lambda\mathrm{id}_E - 6\mathrm{id}_E = (\lambda^2 + \lambda - 6)\mathrm{id}_E$$

Par l'hypothèse, $E \neq \{0\}$, on en déduit donc $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$, d'où $\lambda = 2$ ou -3. C'est-à-dire, si $\dim(V) = 1$, on aurait $u = 2\mathrm{id}_E$ ou $u = -3\mathrm{id}_E$, d'où une contradiction. Donc $\dim(V) = 2$.

Exo. 4. Remarquons d'abord qu'on a les égalités suivantes :

$$0 = u^2 - 5u + 6\mathrm{id}_E = (u - 2\mathrm{id}_E)(u - 3\mathrm{id}_E) = (u - 3\mathrm{id}_E)(u - 2\mathrm{id}_E). \qquad (*)$$

Montrons ensuite qu'on a $E = \ker(u - 2\mathrm{id}_E) + \ker(u - \mathrm{id}_E)$. Quelque soit $x \in E$, on pose $y = u(x) - 2x$, d'après les égalités $(*)$, on a $(u - 3\mathrm{id}_E)y = (u - 3\mathrm{id}_E)(u - 2\mathrm{id}_E)x = 0$, c'est-à-dire $y \in \ker(u - 2\mathrm{id}_E)$. D'autre part, on a $z := x - y = 3x - u(x)$, on a donc $(u - 2\mathrm{id}_E)z = (u - 2\mathrm{id}_E)(u - 3\mathrm{id}_E)(-x) = 0$, donc $z \in \ker(u - 2\mathrm{id}_E)$. Par suite, $x = y + z$ avec $y \in \ker(u - 2\mathrm{id}_E)$ et $z \in \ker(u - 3\mathrm{id}_E)$. Ceci montre que

$$E = \ker(u - 2\mathrm{id}_E) + \ker(u - 3\mathrm{id}_E).$$

Pour completer la preuve, il faut montrer que $\ker(u - 2\mathrm{id}_E) \cap \ker(u - 3\mathrm{id}_E) = \{0\}$. Pour ceci, quelque soit $x \in \ker(u - 2\mathrm{id}_E) \cap \ker(u - 3\mathrm{id}_E)$, on a alors $u(x) = 2x$, et $u(x) = 3x$. D'où

$$0 = u(x) - u(x) = 2x - 3x = -x.$$

Par conséquent, $x = 0$. Cela finit la démonstration.

Exo. 5. Quelque soit $x \in E$, on a $v(u(x)) \in \mathrm{Im}(v)$, donc $\mathrm{Im}(v \circ u) \subset \mathrm{Im}(v)$. En particulier, on a $\dim(\mathrm{Im}(v \circ u)) \leq \dim(\mathrm{Im}(v))$, c'est-à-dire, $\mathrm{rg}(v \circ u) \leq \mathrm{rg}(v)$. D'autre part, on a $\mathrm{Im}(v \circ u) = v(\mathrm{Im}(u))$, d'où $\dim(\mathrm{Im}(v \circ u)) \leq \dim(\mathrm{Im}(u))$, c'est-à-dire, $\mathrm{rg}(v \circ u) \leq \mathrm{rg}(u)$. Par conséquent, on a

$$\mathrm{rg}(v \circ u) \leq \min(\mathrm{rg}(u), \mathrm{rg}(v)).$$

Exo. 1. (1) Notons $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, et $e_3 = (0, 0, 1)$. Alors $\{e_1, e_2, e_3\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. D'après la définition de f, on a $f(e_1) = (0, -2, -2) = -2e_2 - 2e_3$, $f(e_2) = e_1 - e_2 - e_3$, et $f(e_3) = -e_1 + e_2 + e_3$. Donc

$$f(e_1, e_2, e_3) = (e_1, e_2, e_3)D$$

avec la matrice D donnée par

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) Vérification directe.

(3) Notons $u_1 = (0, 1, 0)$, $u_2 = (1, -1, -1)$, et $u_3 = (0, -2, -2)$. On a alors $f(u_1) = u_2$, $f(u_2) = u_3$, et $f(u_3) = 0$. Donc

$$f(u_1, u_2, u_3) = (u_1, u_2, u_3)D'$$

avec D' donnée par

$$D' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(4) Par conséquent, $\mathrm{Im}(f) =< u_2, u_3 >$ avec $\{u_2, u_3\}$ une base de $\mathrm{Im}(f)$, et $\ker(f) =< u_3 >$ dont une base est donée par $\{u_3\}$. Donc $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$.

(5) En vertu de la question précédente, l'application f n'est ni injective, ni surjective.