MHT201

Quelques indications de TD 13

Exo. 2. Par définition,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

D'autre part,

$$A + 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Donc $A^2 = A + 2I_3$. Montrons ensuite que la matrice A est inversible. Puisque $A^{=}A + 2I_3$, on a $A^{-}A = 2I_3$. D'où

$$I_3 = A \cdot \left(\frac{A - I_3}{2} \right).$$

Par conséquent, la matrice A est inversible, d'inverse $A^{-1} = \frac{A-I_3}{2}$.

Exo. 3. On a

$$AB = AC = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Mais $B \neq C$, ce qui entraîne que A n'est pas inversible.

Exo. 4. On peut vérifier facilement que $F \subset M_3(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Un élément de F s'écrit sous la forme suivante

$$\begin{pmatrix} a+b & 0 & c \\ 0 & b+c & 0 \\ c+a & 0 & a+b \end{pmatrix},$$

qui admet la décomposition suivante :

$$\begin{pmatrix} a+b & 0 & c \\ 0 & b+c & 0 \\ c+a & 0 & a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & c & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ou encore

$$\begin{pmatrix} a+b & 0 & c \\ 0 & b+c & 0 \\ c+a & 0 & a+b \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc, le sous-espace F est engendreé par les trois matrices :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette famille $\{A_1, A_2, A_3\}$ est également libre : soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{pmatrix} a+b & 0 & c \\ 0 & b+c & 0 \\ c+a & 0 & a+b \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

D'où

$$\begin{cases} a+b=0 \\ c=0 \\ b+c=0 \\ c+a=0 \\ a+b=0. \end{cases}$$

Donc $a=b=c=0$. Par suite, F est de dimension 3 sur $\mathbb{R}$, avec $\{A_1, A_2, A_3\}$ une famille de base de F. De la même manière, le sous-espace G est engendré par les quatres matrices :

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

qui nous font une base de G.

Exo. 5. La base canonique de $M_2(\mathbb{R})$ est donnée par

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Puis, par un calcul direct, on a

$$\begin{aligned} f(E_{11}) &= AE_{11} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -E_{11} + E_{21} \\ f(E_{12}) &= AE_{12} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -E_{12} + E_{22} \\ f(E_{21}) &= AE_{21} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2E_{11} \\ f(E_{22}) &= AE_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2E_{12}. \end{aligned}$$

Par suite,
$$f(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}) = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})P$$
avec P (= la matrice de f dans la base canonique) donnée par
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exo. 6. (i) Vérification directe.

(ii) Par définition, on a $f(1) = f(X) = 0$, $f(X^2) = (X+1)^2 + (X-1)^2 - 2X^2 = 2$, et $f(X^3) = (X+1)^3 + (X-1)^3 - 2X^3 = 6X$. Donc
$$f(1, X, X^2, X^3) = (1, X, X^2, X^3) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(iii) Soit $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \in \mathbb{R}_3[X]$. Alors
$$f(P(X)) = 2a_2 + 6a_3X.$$
Par suite, $f(P(X)) = 0$ si et seulement si $a_2 = a_3 = 0$. Donc
$$\ker(f) = \{a_0 + a_1X \in \mathbb{R}_3[X] | a_0, a_1 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}_1[X] \subset \mathbb{R}_3[X].$$
De plus, $\mathrm{Im}(f)$ est le sous-espace de $\mathbb{R}_3[X]$ engendré par $f(1) = 0$, $f(X) = 0$, $f(X^2) = 2$, et $f(X^3) = 6X$. Donc
$$\mathrm{Im}(f) =< 0, 0, 2, 6X >= \mathbb{R}_1[X] \subset \mathbb{R}_3[X].$$
Donc $\dim_{\mathbb{R}} \ker(f) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im}(f)) = 2$.

(iv) Soient $Q(X) = a + bX \in \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_1[X]$, $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \in \mathbb{R}_3[X]$ tels que $f(P) = a + bX$. On a donc
$$f(P) = 2a_2 + 6a_3X = a + bX,$$
d'où $a_2 = \frac{a}{2}$, et $a_3 = \frac{b}{6}$. Donc, il nous reste à démontrer l'assertion suivante : soient $a, b \in \mathbb{R}$ deux réels fixés, il existe des réels uniques a_0, a_1 tel que le polynôme
$$P(X) = a_0 + a_1X + \frac{a}{2}X^2 + \frac{b}{6}X^3$$
vérifie les conditions suivantes : $P(0) = P'(0) = 0$. On a donc $a_0 = a_1 = 0$. Par suite, $P(X) = \frac{a}{2}X^2 + \frac{b}{6}X^3$ est le seul polynôme de degré ≤ 3, tel que $f(P) = Q$, et $P(0) = P'(0) = 0$.