Université Bordeaux I - année 2010-2011
MHT201 Structures Algébriques
Correction du devoir maison 2

Exercice 1. Soit $P(X) \in \mathbb{Q}[X] \backslash \mathbb{Q}$.

1. Soit $D(X) := \text{pgcd}(P(X), P'(X))$.
   a) Montrer que si $\deg D \geq 1$ alors il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $P(\alpha) = D(\alpha) = 0$. En déduire que α est une racine multiple de P.
   b) Montrer que $D(X) = 1$ si et seulement si $P(X)$ n'a que des racines simples.
2. Montrer que si $P(X)$ est irréductible sur $\mathbb{Q}[X]$ alors $P(X)$ n'a pas de racines complexes multiples.
3. Montrer que la réciproque de la question précédente est fausse.

Correction :

1. a) Par définition D divise P donc :

$$\exists P_1(X) \in \mathbb{Q}[X] \text{ telque } P(X) = D(X)P_1(X)$$

Or $\deg D \geq 1$ donc $\deg P_1 \leq \deg P - 1$, en particulier il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $P(\alpha) = 0$ et $P_1(\alpha) \neq 0$. Comme $\mathbb{C}$ est un corps, on a $D(\alpha) = 0$.

Par définition du pgcd, D divise P', donc

$$\exists T(X) \in \mathbb{Q}[X] \text{ telque } P'(X) = D(X)T(X)$$

En particulier $D(\alpha)T(\alpha) = 0 = P'(\alpha)$, i.e. α est une racine multiple de $P(X)$.

1. b) A la question précédente on a montré que si P n'a que des racines simples alors $\deg D = 0$, i.e. $D = 1$.

Inversement, si P a une racine multiple $a \in \mathbb{C}$ alors $(X - a)^2$ divise P :

$$P(X) = (X - a)^2 T(X)$$

d'où

$$P'(X) = 2(X - a)T(X) + (X - a)^2 T'(X)$$

donc $X - a$ divise $P(X)$ et $P'(X)$ donc $X - a$ divise $D(X)$, en particulier $\deg D \geq 1$.

2. Soit $D(X) := \text{pgcd}(P(X), P'(X))$, comme D divise P et que P est irréductible, on a soit $\deg D = 0$, soit $\deg D = \deg P$. Supposons que $\deg D = \deg P$. Comme P est irréductible on a $\deg P \geq 1$ donc $P' \neq 0$. Puisque D divise P' on a $\deg D \leq \deg P' = \deg P - 1$, ce qui est une contradiction avec $\deg D = \deg P$. Ainsi $\deg D = 0$ i.e. $D = 1$. D'après 1.b) P n'a que des racines simples.
3. La réciproque de la question 2. est : « si $P \in \mathbb{Q}[X]$ n'a pas de racines multiples, alors P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ »qui est évidemment fausse car $P(X) = X(X-1)$ n'a que des racines simples, mais n'est évidemment pas irréductible.

Exercice 2. Soient $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ et $P(X) := X^4 + 4aX + b$.

1. Montrer que si $z \in \mathbb{C}$ est une racine multiple de $P(X)$ alors $z^3 = -a$.
2. Montrer que $P(X)$ a une racine multiple α si et seulement si $b^3 = 27a^4$.
3. Calculer l'ordre de multiplicité de la racine α de $P(X)$.

Correction :

1. On a $P'(X) = 4(X^3 + a)$. Soit $z \in \mathbb{C}$, z est une racine multiple de P si et seulement si $P(z) = 0 = P'(z)$. En particulier si z est racine multiple $z^3 = -a$.
2. Si z est racine multiple on doit avoir

$$\begin{cases} z^3 = -a \\ z^4 + 4az + b = 0 \end{cases}$$

Or
$$-az + 4az = -b \Leftrightarrow -3az = b \Rightarrow -27a^3z^3 = b^3 \Leftrightarrow 27a^4 = b^3$$

Inversement, si $27a^4 = b^3$, soit $z \in \mathbb{C}$ une racine de $X^3 + a$. On a donc $-z^3 27a^3 = b^3$ d'où $(\frac{b}{3za})^3 = -1$ et

$$\frac{b}{3za} = -1 \text{ ou } -j \text{ ou } -j^2$$

Si on est dans un des deux derniers cas, quitte à remplacer z par jz ou j^2z (qui sont encore des racines de $X^3 + a$) on peut supposer que $(\frac{b}{3za}) = -1$ i.e. $b = -3az = -4az + az = -4az - z^4$. Finalement on a trouvé $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^3 + a = 0$ et $z^4 + 4az + b = 0$, autrement dit z est racine multiple de $P(X)$.
3. On a $P''(X) = 12X^2$. Or $z^3 = -a \neq 0$ donc $z \neq 0$ et en particulier $P''(z) \neq 0$, c'est-à-dire z est racine double de P.

Exercice 3. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Soient F, G et H trois sous-espaces de E.

1. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de $E \iff F \subseteq G$ ou $G \subseteq F$.
2. Montrer que
$$G \subseteq F \Longrightarrow F \cap (G + H) = G + (F \cap H)$$

Correction :

1. Si $F \subseteq G$ alors $F \cup G = G$ est bien un sous-espace de E. Si $G \subseteq F$ alors $F \cup G = F$ est bien un sous-espace de E.

   Inversement, si $F \nsubseteq G$ et $G \nsubseteq F$ il existe $a \in F \backslash G$ et $b \in G \backslash F$. On a bien $a \in F \subseteq G \cup F$ et $b \in G \subseteq G \cup F$ pourtant $a + b \notin G \cup F$. En effet si $a + b \in G \cup F$ alors soit $a + b = g \in G$ soit $a + b = f \in F$. Par exemple si $a + b = g \in G$ alors $a = g - b \in G$ car G est un espace vectoriel donc stable par combinaison linéaire, ce qui est en contradiction avec $a \in F \backslash G$. Ainsi $F \cup G$ n'est pas un sous-espace de E car $a, b \in F \cup G$ et $a + b \notin F \cup G$.

2. On va montrer la double inclusion.

   Soit $t \in F \cap (G+H)$, il existe $f \in F$, $g \in G$ et $h \in H$ tels que

$$t = f = g + h$$

   Comme $g \in G \subseteq F$ on a $h = f - g \in F$ car F est un espace vectoriel donc stable par combinaison linéaire. Ainsi $h \in F \cap H$ et $t = g + h \in G + (F \cap H)$.

   Soit $t \in G + (F \cap H)$, il existe $g \in G$ et $u \in F \cap H$ tels que

$$t = g + u$$

   Or $g \in G \subseteq F$ et $u \in F \cap H \subseteq F$ donc $t = g + u \in F$. Comme $u \in F \cap H \subseteq H$ on a bien $t = g + u \in G + H$. Finalement $t \in F \cap (G+H)$.

Exercice 4. 1. Factoriser le polynôme X^6+1 en produit des facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, puis dans $\mathbb{C}[X]$.

2. Décomposer la fraction rationnelle $\dfrac{1}{X^6+1}$ en éléments simples à coefficients dans $\mathbb{R}$, puis dans $\mathbb{C}$.

Correction : 1) On a $X^6 + 1 = (X^2)^3 + 1 = (X^2+1)(X^4 - X^2 + 1)$, puis

$$\begin{aligned} X^4 - X^2 + 1 &= (X^4 + 2X^2 + 1) - 3X^2 \\ &= (X^2+1)^2 - (\sqrt{3}X)^2 \\ &= (X^2 + \sqrt{3}X + 1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1). \end{aligned}$$

Donc $X^6 + 1 = (X^2+1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1)$.

Il est clair que $X^2 + 1$ n'a pas de racine réelle. Pour $P_1 = X^2 + \sqrt{3}X + 1$, on a $\Delta_1 = (\sqrt{3})^2 - 4 = -1 < 0$, donc P_1 n'a pas de racines réelles. Idem pour $P_2 = X^2 - \sqrt{3}X + 1$. On a donc obtenu une factorisation de $X^6 + 1$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

X^2+1 a deux racines complexes $X = \pm\imath$, les racines complexes de P_1 sont $\dfrac{-\sqrt{3} \pm \imath}{2}$, et celles de P_2 sont $\dfrac{\sqrt{3} \pm \imath}{2}$. D'où

$$X^6 + 1 = (X - \imath)(X + \imath)(X + \frac{\sqrt{3} - \imath}{2})(X + \frac{\sqrt{3} + \imath}{2})(X - \frac{\sqrt{3} - \imath}{2})(X - \frac{\sqrt{3} + \imath}{2}).$$

2) On a

$$\frac{1}{X^6+1} = \frac{aX+b}{X^2+1} + \frac{cX+d}{X^2+\sqrt{3}X+1} + \frac{eX+f}{X^2-\sqrt{3}X+1},$$

d'où

$$\begin{aligned}
1 &= (aX+b)(X^4-X^2+1)+(cX+d)(X^2+1)(X^2-\sqrt{3}X+1)\\
&\quad +(eX+f)(X^2+1)(X^2+\sqrt{3}X+1)\\
&= (a+c+e)X^5+(b+d+f-\sqrt{3}c+\sqrt{3}e)X^4+(-a+2c+2e-\sqrt{3}d+\sqrt{3}f)X^3\\
&\quad +(-b+2d+2f-\sqrt{3}c+\sqrt{3}e)X^2+(a+c+e-\sqrt{3}d+\sqrt{3}f)X+(b+d+f).
\end{aligned}$$

On en déduit

$$\left\{\begin{array}{lcll}
a+c+e & = & 0 & (1)\\
b+d+f+\sqrt{3}(e-c) & = & 0 & (2)\\
-a+2c+2e+\sqrt{3}(f-d) & = & 0 & (3)\\
-b+2d+2f+\sqrt{3}(e-c) & = & 0 & (4)\\
a+c+e+\sqrt{3}(f-d) & = & 0 & (5)\\
b+d+f & = & 1 & (6)
\end{array}\right.$$

(1) et (5) impliquent

$$f-d=0 \qquad (7)$$

Combinant avec (3), on a

$$-a+2c+2e=0 \qquad (8)$$

(8) et (1) impliquent $a=0$ et

$$c+e=0 \qquad (9)$$

(2) et (6) impliquent

$$\sqrt{3}(e-c)=-1 \qquad (10)$$

On déduit de (9) et (10) que $c=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$, et $e=-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$. En utilisant (4), on obtient

$$-b+2d+2f=1 \qquad (11)$$

(11) et (6) implique $3(d+f)=2$, et avec (7), on obtient $d=f=\dfrac{1}{3}$, et donc $b=\dfrac{1}{3}$. Il vient

$$\frac{1}{X^6+1}=\frac{1}{3(X^2+1)}+\frac{\frac{1}{2\sqrt{3}}X+\frac{1}{3}}{X^2+\sqrt{3}X+1}+\frac{-\frac{1}{2\sqrt{3}}X+\frac{1}{3}}{X^2-\sqrt{3}X+1}.$$

On a

$$\frac{1}{X^2+1}=\frac{\imath}{2}\frac{1}{X+\imath}-\frac{\imath}{2}\frac{1}{X-\imath},$$

puis

$$\frac{\frac{1}{2\sqrt{3}}X+\frac{1}{3}}{X^2+\sqrt{3}X+1}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{3}}X+\frac{1}{3}}{(X+\frac{\sqrt{3}-\imath}{2})(X+\frac{\sqrt{3}+\imath}{2})}=\frac{\frac{1}{4\sqrt{3}}-\frac{\imath}{12}}{X+\frac{\sqrt{3}-\imath}{2}}+\frac{\frac{1}{4\sqrt{3}}+\frac{\imath}{12}}{X+\frac{\sqrt{3}+\imath}{2}}$$

et

$$\frac{-\frac{1}{2\sqrt{3}}X+\frac{1}{3}}{X^2-\sqrt{3}X+1}=\frac{-\frac{1}{2\sqrt{3}}X+\frac{1}{3}}{(X-\frac{\sqrt{3}-\imath}{2})(X-\frac{\sqrt{3}+\imath}{2})}=\frac{-\frac{1}{4\sqrt{3}}+\frac{\imath}{12}}{X-\frac{\sqrt{3}-\imath}{2}}+\frac{-\frac{1}{4\sqrt{3}}-\frac{\imath}{12}}{X-\frac{\sqrt{3}+\imath}{2}}$$

Donc

$$\frac{1}{X^6+1}=\frac{\frac{\imath}{6}}{X+\imath}-\frac{\frac{\imath}{6}}{X-\imath}+\frac{\frac{1}{4\sqrt{3}}-\frac{\imath}{12}}{X+\frac{\sqrt{3}-\imath}{2}}+\frac{\frac{1}{4\sqrt{3}}+\frac{\imath}{12}}{X+\frac{\sqrt{3}+\imath}{2}}+\frac{-\frac{1}{4\sqrt{3}}+\frac{\imath}{12}}{X-\frac{\sqrt{3}-\imath}{2}}+\frac{-\frac{1}{4\sqrt{3}}-\frac{\imath}{12}}{X-\frac{\sqrt{3}+\imath}{2}}.$$

Exercice 5. Soit $P(X) := X^n - 2011$, où n est un entier ≥ 1.

1. Trouver toutes les racines de P, et factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$ (*Indication :* on pourra commencer par chercher les racines du polynôme $X^n - 1$).
2. Montrer que l'on a l'égalité suivante

$$\frac{1}{P(X)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{X-z_k},$$

   où $a_k \in \mathbb{C}$, et $z_1, \ldots, z_n$ sont les racines de P.
3. Montrer que $a_k = \dfrac{z_k}{2011n}$, pour tout $k = 1, \ldots, n$.

Correction :

1) Soit $\rho = \sqrt[n]{2011} \in \mathbb{R}$. En posant $X = \rho Y$, on a

$$X^n - 2011 = \rho^n Y^n - 2011 = 2011(Y^n - 1).$$

On en déduit que l'ensemble des racines de P est $\{\rho\eta_1, \rho\eta_2, \ldots, \rho\eta_n\}$, où les η_k sont les racines du polynômes $P_n(Y) = Y^n - 1$. On sait que l'ensemble des racines de P_n est $\{e^{\frac{2\pi\imath k}{n}},\ k = 1, \ldots, n\}$, donc l'ensemble des racines de P est $\{\rho e^{\frac{2\pi\imath k}{n}},\ k = 1, \ldots, n\}$. On pose $z_k = \rho e^{\frac{2\pi\imath k}{n}}$, $k = 1, \ldots, n$. Comme P est unitaire, on a

$$P(X) = (X - z_1)(X - z_2)\ldots(X - z_n).$$

2) D'après un théorème du cours, on a

$$\frac{1}{P(X)}=\frac{1}{(X-z_1)\ldots(X-z_n)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{X-z_k} \qquad (*)$$

où a_k sont des constantes.

3) Pour calculer a_i, on multiplie l'égalité (*) par $(X - z_i)$, puis évalue les deux côtés en $X = z_i$, on obtient alors

$$\frac{1}{(z_i-z_1)\ldots(z_i-z_{i-1})(z_i-z_{i+1})\ldots(z_i-z_n)}=a_i.$$

Montrons que $(z_i - z_1)\dots(z_i - z_{i-1})(z_i - z_{i+1})\dots(z_i - z_n) = P'(z_i)$. On a

$$P(X) = \prod_{k=1}^{n}(X - z_k)$$

Appliquant la règle de Leibniz, on a

$$P'(X) = \prod_{k\neq 1}(X - z_k) + \prod_{k\neq 2}(X - z_k) + \cdots + \prod_{k\neq n}(X - z_k),$$

donc

$$P'(X) = (X - z_i)Q_i(X) + \prod_{k\neq i}(X - z_k), \text{ avec } Q_i \in \mathbb{C}[X].$$

Il vient alors

$$P'(z_i) = \prod_{k\neq i}(z_i - z_k) = (z_i - z_1)\dots(z_i - z_{i-1})(z_i - z_{i+1})\dots(z_i - z_n).$$

Comme $P(X) = X^n - 2011$, on a $P'(X) = nX^{n-1}$, donc $P'(z_i) = nz_i^{n-1}$. Rappelons que z_i est une racine de P, donc $z_i^n - 2011 = 0$, autrement-dit $z_i^n = 2011$. Il s'ensuit

$$P'(z_i) = nz_i^{n-1} = \frac{nz_i^n}{z_i} = \frac{2011n}{z_i},$$

et donc

$$a_i = \frac{1}{P'(z_i)} = \frac{z_i}{2011n}.$$