ex 1 (DS 3/2010)

Soient $u_1 = (1,2,1)$, $u_2 = (1,1,-1)$, $u_3 = (1,3,3)$

$v_1 = (2,3,-1)$, $v_2 = (1,2,2)$, $v_3 = (1,1,-3)$ $\in \mathbb{R}^3$

Posons $U = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$

$V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$

1) extraire de $\{u_1, u_2, u_3\}$ une base de U

2) trouver une base de $U+V$

3) Déterminer $U \cap V$

4) on a $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$??

Corrigé :

1) on considère la matrice

$$(u_1, u_2, u_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

qui est donc ligne-équivalente à

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc la famille $\{u_1, u_2\}$ forme une base de U sur $\mathbb{R}$.

2) $U+V = \langle u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3 \rangle$

on considère donc la matrice suivante

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

qui est donc ligne-équivalente à

pivots

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & -3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & +1 & -2 \end{pmatrix}$$

donc $\{u_1, u_2, v_1\}$ forme une base de $\text{Vect}\{u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3\} = U+V$

En particulier, on a $\mathbb{R}^3 = U + V$

iii). pour déterminer $U \cap V$.

on continue avec la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

premier pivot.

et on poursuit la méthode du pivot.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $\{v_1, v_2\}$ forme une base de V.

ensuite, on calcule les coordonnés de v_2 dans la base $\{u_1, u_2, v_1\}$ de $U+V$, c'est-à-dire, il faut trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ t.q

$$v_2 = a u_1 + b u_2 + c v_1 = 0$$

i.e il faut résoudre le système suivant.

$$S: \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

or d'après le calcul qu'on a fait dans la question 2). on a

$$(S) \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = -1 \end{cases}$$

donc $\quad v_2 = 2u_1 + u_2 - v_1$

par suite $w := v_1 + v_2 = 2u_1 + u_2$

est t.q $\quad w \in U \cap V$

et la famille $\{w\}$ forme une base de $U \cap V$.

4). d'après 2). on a $\quad U + V = \mathbb{R}^3$

mais en vertu de (3), on a $\quad U \cap V \neq \{0\}$

par conséquence $\quad \mathbb{R}^3 \neq U \oplus V$

ex 2. Soient E, et F les ss-... de $\mathbb{R}^4$, définis par les systèmes d'équations suivants.

$$E : \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$$

$$F : \begin{cases} x - 2y + t = 0 \\ x - t = 0 \end{cases}$$

i) les sous-ensembles E et F sont-ils des sous-espaces vectorels de $\mathbb{R}^4$?

ii) Déterminer $E \cap F$, et donner une base de $U \cap V$

Corrigé.

(i) comme E et F sont définis par des systèmes linéaires homogènes, on sait que

$$E \subset \mathbb{R}^4. \quad F \subset \mathbb{R}^4$$

Sont bien des sous-espace vectorels de $\mathbb{R}^4$

(ii). Un element de $E \cap F$ est solution du système

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ x - 2y + t = 0 \\ x - t = 0. \end{cases}$$

en résolvant ce système, on a

$$\begin{cases} x = r \\ y = 0 \\ z = -2r \\ t = r \in \mathbb{R} \end{cases}$$

donc $E \cap F = \{(r, 0, -2r, r) \in \mathbb{R}^4 / r \in \mathbb{R}\}$

avec une base donnée par.

$$\{(1, 0, -2, 1)\}$$