Licence 1, Semestre 1
Mose 1003, Mathématiques
Analyse - Algèbre

Feuille d'exercices 1

Exercice 1. Calculer les dérivées des fonctions suivantes en précisant l'intervalle maximal de définition.

$$x \mapsto x \ln x, \qquad t \mapsto (2 - \sin t)^{\alpha} \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \arccos(1 - x^2)$$

Exercice 2. Calculer les limites suivantes en utilisant la définition de la dérivée.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}, \qquad \lim_{x \to 1} \frac{\sin \pi x}{x - 1}, \qquad \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}$$

Exercice 3. Donner la courbe représentative de la fonction $y = f(x)$ suivante, et puis calculer $\int_0^4 f(x)dx$.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & : \ 0 \leq x \leq 1; \\ x & : \ 1 < x \leq 2; \\ -2x + 6 & : \ 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

Exercice 4. Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_1^4 \frac{1}{x\sqrt{x}}dx, \qquad \int_{-1}^1 |x|^3 dx, \qquad \int_1^2 \frac{x^3+1}{4x}dx, \qquad \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx, \qquad \int_{-1}^{-2} \frac{1}{x}dx, \qquad \int_e^{1/e} |\ln x| dx$$

Exercice 5. Calculer les intégrales suivantes en précisant l'intervalle maximal de définition.

$$\int \frac{3x^3 + 5x + 1}{x^2}dx, \qquad \int \sin x \ dx, \qquad \int \frac{1}{1+x^2}dx, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x}dx, \qquad \int \ln x dx$$

Exercice 6.

1. Supposons que $\int_0^3 \sqrt{9-x^2}dx = \frac{9\pi}{4}$ est connue. Soient $A = \int_0^3 \left(\sqrt{9-x^2} - 3\right) dx$, et $B = \int_0^3 \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}+3}dx$. Calculer d'abord A et $A + B$, puis en déduire B.
2. Montrer que $\int_0^3 \sqrt{9-x^2}dx = \frac{9\pi}{4}$ en utilisant la formule de changement de variables avec $x = \sin t$.

Exercice 7.

1. Donner la formule d'intégration par partie.
2. Calculer
$$\int_0^1 (x+5)e^{x+1}dx, \qquad \int_0^1 (x+5)^2 e^{x+1}dx.$$
3. Soit $n \geq 1$ un entier. Montrer que
$$\int_0^1 x^n e^x dx = e - n \cdot \int_0^1 x^{n-1} e^x dx.$$

4. Pour chaque $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, posons
$$I_n = \int_0^1 x^n e^{x^2} dx.$$
   (a) Trouver une relation entre I_{n+2} et I_n.
   (b) Calculer I_1, puis I_5.

Exercice 8. Calculer les intégrales suivantes en utilisant la formule d'intégration par parties :

$$\int_0^{\pi/4} \frac{t}{\cos^2 t} dt. \qquad \int_0^{\pi/2} x \sin(2x) dx, \qquad \int_1^2 t^n \ln t dt \text{ (pour } n \in \mathbb{Z}), \qquad \int_0^{\pi/2} e^x \sin(2x) dx.$$

Exercice 9. Calculer les intégrales suivantes en utilisant la formule de changement de variables :

$$\int_0^1 2xe^{x^2} dx, \qquad \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx, \qquad \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sin x \cos x dx, \qquad \int_{\pi/4}^{\pi/3} \tan x dx.$$

Exercice 10. Calculer les intégrales suivanes :

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos^4 x \cdot \sin^3 x dx, \qquad \int_0^1 e^x \sqrt{e^x+1} dx, \qquad \int_0^1 \frac{x+1}{x^2+1} dx, \qquad \int_0^1 \arctan x dx$$

Exercice 11. Trouver les primitives

$$\int x^2 \sqrt{x^3+1} dx, \qquad \int \frac{x+1}{x^2+2x+2} dx, \qquad \int e^x \cos x dx, \qquad \int \arcsin x dx$$

Exercice 12. Déterminer deux réels a et b, tels que pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 5\}$, on ait
$$\frac{1}{x^2-4x-5} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-5},$$
puis calculer
$$\int_0^2 \frac{1}{x^2-4x-5} dx$$

Exercice 13. Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction
$$f : x \mapsto \frac{x}{x^2-x-2}$$
définie sur l'intervalle $]2, +\infty[$.