Licence 1, Semestre 1
Mose 1003, Mathématiques
Analyse - Algèbre

Feuille d'exercices 3

Equations différentielles

Exercice 1. Résoudre les équations différentielles suivantes

1. $y' + 3y = 4e^x$ avec la condition initiale $y(0) = -2$.
2. $3y' + 2y = 2x^3 + 14$ avec la condition initiale $y(0) = 1$.
3. $y' - y = \sin x + \cos x$.
4. $y' = x^2 y$.
5. $y' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot y$ pour $x \in]-1, 1[$
6. $y' = y \cdot \sin x$.

Exercice 2. Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y' + 3y = xe^{-x} + 5$.
2. $y' = 3y + e^{3x} \cdot \sin x$.
3. $y' = y \cdot \sin x + \sin x$ avec la condition initiale $y(\pi/2) = 1$.
4. $y' = 2xy + e^{x^2} \sin x$.
5. $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$.

Exercice 3. Pour chacune des équations différentielles suivantes, déterminer l'ensemble des solutions, puis, la solution qui vérifie les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$ pour les équations 1,2,4 et 6.

1. $y'' + 2y' - 3y = -t + 1$.
2. $y'' + 2y' - 3y = e^{2t}$.
3. $y'' + 2y' - 3y = -t + 1 + e^{2t} + \cos t$.
4. $y'' - 6y' + 9y = 3 + e^t$.
5. $y'' - 3y' = 3 + t^2$.
6. $y'' + y = t + \sin(2t)$.

Exercice 4. On veut résoudre l'équation suivante :

$$y'' + 5y' - 6y = e^{2x}(x^2 + 1) \qquad (E).$$

1. Résoudre son équation homogène associée.
2. Soit $y_p = y_p(x)$ une solution particulière de (E), qui s'écrit sous la forme $y_p(x) = Q(x) \cdot e^{2x}$.
   (a) Trouver une équation différentielle (E') vérifiée par la fonction $x \mapsto Q(x)$.
   (b) Résoudre l'équation (E').
   (c) En déduire une solution particulière de (E).
3. Déterminer l'ensemble des solutions de (E), puis, la solution qui vérifie les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = -1$.

Exercice 5.(Loi de refroidissement de Newton) Cette loi de refroidissement (ou de réchauffement) suppose que le taux de variation de la température d'un objet est proportionnel à la différence de température entre l'objet et le milieu ambiant. Le coefficient de proportionnalité k dépend essentiellement de la surface de contact entre l'objet et son milieu (on le considèrera constant). On note $T(t)$ la température de l'objet à l'instant t.

1. Donner l'équation différentielle dont est solution la fonction T si l'on suppose que le milieu ambiant est à température constante T_a.
2. Déterminer $T(t)$ si l'objet possède une température initiale $T(0) = T_0$.
3. On suppose maintenant que la température ambiante varie avec le temps (par exemple cas du sol exposé aux rayons du soleil). Déterminer $T(t)$ lorsque $T_a(t) = T_m \sin(\omega t)$.

Exercice 6.(Chute) Le principe fondamental de la dynamique de Newton dit que le centre d'inertie d'un corps de masse m subit une accélération $\vec{a} = \frac{1}{m}\vec{F_e}$ où $\vec{F_e}$ est la somme des forces extérieures exercées sur l'objet. On choisit un axe vertical repéré par le vecteur $\vec{\jmath}$ orienté vers le haut et d'origine O d'altitude 0. Ainsi le champ de pesanteur $\vec{g} = -g\vec{\jmath}$ et la vecteur accélération $\vec{a} = a(t)\vec{\jmath}$.

1. Si $z(t)$ désigne l'altitude du centre d'inertie du corps à l'instant t, exprimer $a(t)$ en fonction de $z(t)$.
2. En l'absence de frottement, la seule force extérieure est la force de pesanteur $m\vec{g}$. En déduire que la fonction z satisfait l'équation différentielle
$$z'' = -g.$$
Puis la résoudre en supposant que la position initiale est $z(0) = h$ et que le corps n'a pas de vitesse initiale.
3. Avec frottements, on suppose que le corps est soumis à une force de frottements proportionnelle à la vitesse (hypothèse valable seulement pour une vitesse pas trop élevée). Vérifier que la fonction z vérifie alors l'équation différentielle
$$z'' = -g - \frac{k}{m}z'$$
puis la résoudre.
4. Dans le cas précédent, calculer la limite lorsque t tend vers l'infini de z', quelle interprétation pouvez-vous en donner ?