Licence 1, Semestre 1
Mose 1003, Mathématiques
Analyse - Algèbre

Feuille d'exercices 3

Exercice 1.

1. Trouver la formule de Taylor d'ordre 2 en 0 des fonction suivante :
$$\ln(1+x), \qquad \frac{1}{1+x}, \qquad \tan(x),$$
2. Trouver la formule de Taylor d'ordre 2 en $x_0 = 1$ de la fonction $x \mapsto \cos(\pi x)$, puis en déduire la limite suivante :
$$\lim_{x\to 1} \frac{\cos(\pi x)+1}{(x-1)^2}.$$

Exercice 2.

1. Calculer la derivée partielle par rapport à x des fonctions suivantes :
$$\ln(1-xy), \qquad \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}}, \qquad ye^x \sin(x+y)$$
2. Pouvez-vous préciser le domaine maximal de définition des fonctions précédentes ?

Exercice 3. On considère la fonction
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$, et $\frac{\partial f}{\partial y}$.
2. Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$, et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

Exercice 4. Trouver la formule de Taylor d'ordre 2 de la fonction $f(x,y) = \sqrt{1+x+y}$ en $(0,0)$.

Exercice 5. Calculer les intégrales suivantes :
$$\int_{[0,1]\times[0,1]} e^{x+y} d(x,y), \qquad \int_{\{x^2+y^2\le 1\}} e^{x^2+y^2} d(x,y), \qquad \int_{[0,1]^3} \sqrt{1+x+y} \cdot d(x,y,z)$$

Exercice 6. Soit C un corps de $\mathbb{R}^2$ (resp. de $\mathbb{R}^3$. On appelle le *volume* de C la valeur $\int_C 1 \cdot d(x,y)$ (resp. la valeur $\int_C 1 \cdot d(x,y,z)$), et pour C un corps de $\mathbb{R}^2$ (resp. de $\mathbb{R}^3$) *de volume fini*, on appelle le *barycentre* de C le point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ (resp. $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$) donné par
$$x_0 = \frac{\int_C xd(x,y)}{\int_C 1 \cdot d(x,y)}, \ y_0 = \frac{\int_C yd(x,y)}{\int_C 1 \cdot d(x,y)} \ \left(\text{resp. } x_0 = \frac{\int_C xd(x,y,z)}{\int_C 1 \cdot d(x,y,z)}, \ y_0 = \frac{\int_C yd(x,y,z)}{\int_C 1 \cdot d(x,y,z)} \ z_0 = \frac{\int_C zd(x,y,z)}{\int_C 1 \cdot d(x,y,z)} \right)$$
Calculer le volume et le barycentre des corps suivants :

1. $C = [0,1] \times [2,4] \times [1,3] \subset \mathbb{R}^3$
2. $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1\} \subset \mathbb{R}^2$