Licence 1, Semestre 1
MOSE1003 Mathématiques
Analyse - Algèbre

Test 1 (trois exos, durée 20 mins)

1 (1+2+2=5 points)- On considère la fonction suivante $f(x) = x \ln x - x$.

a) Préciser l'intervalle maximal de définition de f.

Corrigé : pour que la fonction $\ln x$ soit bien définie, il faut $x > 0$. Donc l'intervalle maximal de définition de f est $]0, \infty[$.

b) Calculer la dérivée de f.

Corrigé : on a $f'(x) = (x \ln x - x)' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \dfrac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$ pour $x > 0$.

c) Déduire de la question (b) l'ensemble des primitives de la fonction $g(x) = \ln x$ sur l'intervalle maximal de définition de la fonction g.

Corrigé : D'après (b), l'ensembles des primitives de $g = \ln x$ sur l'intervalle $]0, \infty[$ est

$$\{x \mapsto x \ln x - x + C : C \in \mathbb{R}\}.$$

2 (2+2+2=6 points)-

a) Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \sin(\pi x)$

Corrigé : $(\sin(\pi x))' = \sin'(\pi x) \cdot (\pi x)' = \cos(\pi x) \cdot \pi = \pi \cos(\pi x)$.

b) Calculer $\displaystyle\int_0^1 x^2 dx$

Corrigé : $\displaystyle\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$.

c) Calculer $\displaystyle\int e^{3x} dx$

Corrigé : puisque $\left(\dfrac{1}{3}e^{3x}\right)' = e^{3x}$, on a donc $\displaystyle\int e^{3x} dx = \frac{1}{3}e^{3x} + C$. On peut aussi utiliser la formule de changement de variables pour trouver le résultat :

$$\int e^{3x} dx = \frac{1}{3} \int e^{3x} \cdot (3x)' dx = \frac{1}{3}e^{3x} + C.$$

3 (2+2+3+2=9 points) -

a) Donner l'énoncé de la formule d'intégration par parties.

Corrigé : Soit I un intervalle, et soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables de dérivées continues sur I. Soient $a, b \in I$, on a alors la formule suivante

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

b) Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto e^{x^2}$, puis en déduire l'intégrale $I_1 = \displaystyle\int_0^1 x \cdot e^{x^2} dx$.

Corrigé : On a $\left(e^{x^2}\right)' = (\exp(x^2))' = \exp'(x^2) \cdot (x^2)' = 2x \exp(x^2)$. En particulier, on a $\left(\frac{1}{2}e^{x^2}\right)' = xe^{x^2}$. Ceci entraîne donc

$$\int_0^1 xe^{x^2} dx = \left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^1 = \frac{e-1}{2}.$$

c) Posons $I_3 = \displaystyle\int_0^1 x^3 \cdot e^{x^2} dx$. En effectuant une intégration par parties, trouver une relation entre I_1 et I_3 (**Indication :** $x^3 e^{x^2} = x^2 \cdot \left(x \cdot e^{x^2}\right)$).

Corrigé : On a

$$\begin{aligned} I_3 = \int_0^1 x^3 e^{x^2} dx &= \int_0^1 x^2 \left(xe^{x^2}\right) dx \\ &= \int_0^1 x^2 \left(\frac{1}{2}e^{x^2}\right)' dx \\ &= \left[x^2 \cdot \frac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^1 - \int_0^1 (x^2)' \cdot \frac{1}{2}e^{x^2} dx \\ &= \frac{e}{2} - \int_0^1 xe^{x^2} dx \\ &= \frac{e}{2} - I_1. \end{aligned}$$

d) Calculer I_3 (on pourra utiliser (b) et (c) de cette question).

Corrigé : D'après (b) et (c), on a $I_3 = \frac{e}{2} - I_1 = \frac{1}{2}$.