Licence 1, Semestre 1
MOSE1003 Mathématiques
Analyse - Algèbre

Test 3 (trois exos, durée 30 mins)

1 (2+2=4 points)- Résoudre les deux systèmes linéaires suivants

$$\begin{cases} 2x + 2y = 4 \\ 4x + \ \ y = 2 \\ 3x + 7y = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 3y + z = 5 \\ \ \ x + 2y + 4z = 6 \end{cases}$$

$$- \begin{cases} 2x+2y=4 \\ 4x+y=2 \\ 3x+7y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ 4x+y=2 \\ 3x+7y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ 3x=0 \\ 3x+7y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2 \\ y=\frac{1}{7} \end{cases} \text{ pas possible}$$

$\Rightarrow$ pas de solution.

$$- \begin{cases} 2x+3y+z=5 \\ x+2y+4z=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+4z=6 \\ 2x+3y+z=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+4z=6 \\ -y-7z=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-8+10t \\ y=7-7t \\ z=t\in\mathbb{R} \end{cases}$$

2 (4 points)- Résoudre en fonction d'un paramètre $t \in \mathbb{R}$ le système suivant :

$$\begin{cases} x + ty = 5 \\ tx + \ \ y = 5. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+ty=5 \\ tx+y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+ty=5 \\ (1-t^2)y=5-5t \end{cases}$$

$$- \text{ Si } 1-t^2 \neq 0 \ (\Leftrightarrow t \neq \pm 1) \Rightarrow \begin{cases} x = 5 - \frac{5t}{1+t} = \frac{5}{1+t}. \\ y = \frac{5}{1+t} \end{cases}$$

$$- \text{ Si } 5-5t = 1-t^2 = 0 \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow \begin{cases} x = 5-s \\ y = s \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$-$ Si $5-5t \neq 0$ mais $t^2-1=0$ ($\Leftrightarrow t=-1$) pas de solution

3 (3+4+3+2=12 pts)- Notons

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

3.a) Calculer M^2.

$$M^2 = \begin{pmatrix} 11 & 14 & 22 \\ 18 & 23 & 36 \\ 12 & 16 & 25 \end{pmatrix}$$

3.b) On admet que la matrice M est *inversible*. Inverser cette matrice M en utilisant la méthode du pivot de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 2L_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ -L_2 \\ -L_3 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 - 2L_2 \\ L_2 \\ L_3 - 2L_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 - L_3 \\ L_2 - L_3 \\ L_3 \end{array}$$

Ainsi $M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

3.c) Ecrire le système linéaire suivant sous la forme matricielle $A \cdot X = b$, et préciser les dimensions de A, X, b.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 3y + 5z = 2 \\ 2x + 2y + 3z = 3. \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{b}$$

$A : 3 \times 3$ $\quad b : 3 \times 1$

$X : 3 \times 1$

3.d) Donner l'ensemble des solutions du système ci-dessus (**Indication :** on pourra ou bien le résoudre directement avec la méthode du pivot de gauss, ou bien appliquer le résultat de la question (1.b) en utilisant la forme martricielle du système ci-dessus).

$A \cdot X = b$ ~~donc~~ avec $A = M$ inversible d'après 3.b)

donc la solution est

$$A^{-1} \cdot b = M^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ainsi la solution est $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases}$.