Dualité de Poincaré en cohomologie étale

Jilong Tong

[1] Dans ces notes, tous les faisceaux considérés sont des faisceaux *étales commutatifs*, et on ne considère que des cohomologie *étale*.

1. Cup produit en cohomologie étale

1.1 Produit tensoriel de deux complexes

1.1.1 Soient Λ un anneau commutatif, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux complexes de Λ-modules, bornés supérieurement. On pose

$$\mathcal{F} \otimes \mathcal{G} = \mathrm{tot}\,(\mathcal{F}^{\bullet} \otimes_{\Lambda} \mathcal{G}^{\bullet})$$

Comme d'habitue, le foncteur $- \otimes \mathcal{G}$ est exact à droite. On peut donc considérer son foncteur dérivé à gauche dans la catégorie dérivée :

$$- \otimes^{L} \mathcal{G} : \mathbb{D}^{-}(\Lambda - \mathrm{Mod}) \to \mathbb{D}^{-}(\Lambda - \mathrm{Mod})$$

Pour calculer $\mathcal{F} \otimes^{L} \mathcal{G}$, on choisit d'abord une résolution *plate* $\mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}$ de $\mathcal{F}$, [2] alors

$$\mathcal{F} \otimes^{L} \mathcal{G} = \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{G}.$$

En particulier, il existe toujours un morphisme canonique dans la catégorie dérivée

$$\mathcal{F} \otimes^{L} \mathcal{G} \to \mathcal{F} \otimes G,$$

et si $\mathcal{F}$ (ou $\mathcal{G}$) est un complexe de Λ-modules *plats*, on a

$$\mathcal{F} \otimes^{L} \mathcal{G} \simeq \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}.$$

1.1.2 Gardons les notations du numéro précédent. Soient $i, j \in \mathbb{Z}$, on pose :

$$\theta_{i,j} : \mathrm{H}^{i}(\mathcal{F}) \otimes \mathrm{H}^{j}(\mathcal{G}) \to \mathrm{H}^{i+j}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}), \quad \bar{a} \otimes \bar{b} \mapsto \overline{a \otimes b},$$

avec $a \in \mathrm{Z}^{i}(\mathcal{F})$ et $b \in \mathrm{Z}^{j}(\mathcal{G})$. On peut vérifier que cette application est bien définie.

1.2 Résolution de Godement, un rappel

1.2.1 Soient X un schéma, $\Lambda = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On désigne dans tout cet exposé indifférement par Λ le faisceau d'anneaux constant associé à Λ sur X. Soit $\mathcal{P}$ un ensemble de points géométriques de X tel que pour chaque point $x \in X$, il existe un point géométrique $\bar{x} \in \mathcal{P}$ qui est au-dessus de x. Soit maintenant $\mathcal{F}$ un faisceau étale abélien sur X, on pose

$$\mathbb{G}^{0}(\mathcal{F}) = \prod_{\overline{x} \in \mathcal{P}} i_{\overline{x},*} i_{\overline{x}}^{*} \mathcal{F}$$

2000 Mathematics Subject Classification

1. Rencontre ANR ARIVAF 30 mai - 01 juin, Jussieu, Paris. **Corrections et commentaires sont les plus bienvenues !**

2. Donc, $\mathcal{F}_1$ est un complexe borné supérieurement formé des $\Lambda-$modules plats, de plus, le morphisme de complexes $\mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}$ est un quasi-isomorphisme.

avec $i_{\overline{x}} : \overline{x} \to X$ le morphisme structural. Il y a alors un morphisme canonique injectif :

$$\mathcal{F} \to \mathbb{G}^0(\mathcal{F})$$

Puis on continue cette construction avec le conoyau du morphisme ci-dessus, on obtient finalement un complexe *exact*

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathbb{G}^0(\mathcal{F}) \to \mathbb{G}^1(\mathcal{F}) \to \cdots ,$$

avec

$$\mathbb{G}^{i+1}(\mathcal{F}) := \mathbb{G}^0 \left(\mathrm{coker}\left(\mathbb{G}^{i-1}(\mathcal{F}) \to \mathbb{G}^i(\mathcal{F})\right)\right)$$

d'où la *résolution de Godement* $\mathcal{F} \to \mathbb{G}^\bullet(\mathcal{F})$ du faisceau $\mathcal{F}$. D'après la construction, les composantes $\mathbb{G}^i(\mathcal{F})$ sont flasques, donc elle nous donne une résolution de $\mathcal{F}$ dont les composantes sont acycliques pour le foncteur $\Gamma(X, -)$. Par suite, $\mathrm{H}^i(X, \mathcal{F}) = \mathrm{H}^i(\Gamma(X, \mathbb{G}^\bullet(\mathcal{F})))$. Pour la construction de cup produit, il nous faut contruire une résolution à la fois plate et acyclique. Pour cela, montrons d'abord les deux lemmes suivants :

Lemme 1.2.2 i) *Soient A un anneau commutatif nothérien, $\{M_i\}_{i\in I}$ une famille de A-modules plats. Alors le produit $M = \prod_i M_i$ est aussi plat sur A.*

ii) *Notons $A = \Lambda = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, et soit M un Λ-module ordinaire. Alors les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *M est plat sur Λ ;*

(b) *M est libre sur Λ ;*

(c) *M est injectif sur Λ.*

Démonstration. (i) Il suffit de démontrer que pour tout idéal $\mathfrak{a} \subset A$, le morphisme induit

$$M \otimes_A \mathfrak{a} \to M$$

est encore injectif. Comme l'anneau A est nothérien, un A-module de type fini est de présentation finie sur A. Par suite le morphisme canonique suivant est un isomorphisme.

$$\left(\prod_{i\in I} M_i\right) \otimes_A \mathfrak{a} \simeq \left(\prod_{i\in I} M_i \otimes_A \mathfrak{a}\right)$$

Sous cette identificaion, le morphisme $M \otimes_A \mathfrak{a} \to M$ s'écrit alors comme le produit des morphismes injectifs $\{M_i \otimes_A \mathfrak{a} \to M_i\}_i$ (car M_i plat sur A). D'où l'injectivité du morphisme $M \otimes_A \mathfrak{a} \to M$, et ceci finit aussi la preuve de (i).

(ii) L'équivalence entre (a) et (b) est facile. Supposons maintenant que M est injectif. Il s'écrit alors comme un facteur direct d'un Λ-module co-libre, c'est-à-dire, un facteur d'un Λ-module L produit de Λ-modules $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \simeq \Lambda$. D'après (i), un tel Λ-module L est libre sur Λ, par suite, M est plat sur Λ. Réciproquement, supposons M est Λ-plat, donc est libre sur Λ. D'autre part, il est bien connu que Λ est injectif en tant qu'un Λ-modules, et puisque Λ est nothérien, il en résulte que le Λ-module M, étant une somme directe de Λ, est aussi injectif sur Λ. D'où le résultat. □

Lemme 1.2.3 *Soient X un schéma, $\Lambda = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.*

i) *Soit*

$$0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$$

une suite exacte courte de faisceaux de Λ-modules. Si les deux premiers faisceaux $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}$ sont plats sur Λ, le dernier module $\mathcal{F}''$ l'est aussi.

ii) *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de Λ-modules plats, alors il en est de même de $\mathbb{G}^i(\mathcal{F})$.* [3]

3. En effet, pour cette propriété, il suffit de prendre Λ un anneau nothérien commutatif (mais l'assertion (i) n'est plus vraie en une telle généralité). Ici, on suppose $\Lambda = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ juste pour simplifier la preuve.

Démonstration. L'assertion (i) est un corollaire direct de 1.2.2 (ii). En effet, un faisceau $\mathcal{M}$ de Λ-modules est plat si et seulement si les fibres géométriques sont plates sur Λ. On se ramène donc à montrer que si l'on a une suite exacte de Λ-modules ordinaires :

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0,$$

alors si les deux premiers sont plats sur Λ, il en est de même de M''. Pour ceci, remarquons que 1.2.2(ii) implique que les deux premiers Λ-modules sont injectifs, par conséquent, le trois Λ-module M'' l'est aussi. Il nous reste à appliquer encore une fois 1.2.2 (ii) pour conclure. Quand à (ii), il suffit de prouver que $\mathbb{G}^0(\mathcal{F})$ est plat sur Λ. Comme $\mathcal{F}$ est plat sur Λ, il en résulte que $\mathcal{F}_{\bar{x}}$ est plat sur Λ quelque soit $\bar{x} \to X$ un point géométrique. Or par construction, quelque soit $U \to X$ un morphisme étale, le Λ-module $\mathbb{G}^\circ(\mathcal{F})(U)$ s'écrit comme un produit de copies de $\mathcal{F}_{\bar{x}}$ ($\bar{x} \in \mathcal{P}$), donc est plat sur Λ (1.2.2 (i)). Ceci finit donc la preuve. □

1.2.4 Soient X/k un k-schéma de type fini de dimension d sur un coprs k algébriquement clos, et $\Lambda = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. En vertu de la dimension cohomologie de X, pour tout faisceau de Λ-modules $\mathcal{F}$, on a

$$\mathrm{H}^i(X, \mathcal{F}) = 0, \qquad \text{dès que } i > 2d.$$

Par conséquent, pour calculer les groupes de cohomologie, au lieu d'utiliser la résolution de Godement $\mathbb{G}^\bullet(\mathcal{F})$ de $\mathcal{F}$, on peut utiliser la résolution de Godement *tronquée* $\mathbb{J}^\bullet(\mathcal{F}) := \tau_{\leq 2d}(\mathbb{G}^\bullet(\mathcal{F}))$: le morphisme $\mathcal{F} \to \mathbb{J}^\bullet(\mathcal{F})$ nous donne une résolution de $\mathcal{F}$ qui n'est plus flasque en général, mais qui reste acyclique pour le foncteur $\Gamma(X, -)$. De plus, si $\mathcal{F}$ est plat sur Λ, il en est de même de $\mathbb{J}^i(\mathcal{F})$ (lemme 1.2.3). En particulier, $\mathcal{F} \to \mathbb{J}^\bullet(\mathcal{F})$ nous donne une résolution bornée qui est à la fois plat et acyclique pour le foncteur $\Gamma(X, -)$.

1.2.5 Plus généralement, soit $\mathcal{F}_1$ un complexe de faisceaux de Λ-modules, en prennant la résolution de Godement *tronquée* de chaque composante de $\mathcal{F}_1$ et puis le complexe total associé, on obtient une résolution de $\mathcal{F}_1$, notée encore par $\mathbb{J}^\bullet(\mathcal{F}_1)$ de $\mathcal{F}_1$, qui est également borné supérieurement. De plus, si $\mathcal{F}_1$ est un complexe de Λ-modules plats, il en est de même de $\mathbb{J}^\bullet(\mathcal{F}_1)$ (1.2.3).

1.3 Cup produit en cohomologie étale ([2] Page 130)

1.3.1 Soient X/k un schéma de type fini séparé sur un corps k *algébriquement clos*, $\Lambda = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux complexes de Λ-modules, bornés supérieurement. Il existe alors un morphisme canonique de groupes

$$\mathrm{can} : \Gamma(X, \mathcal{F}) \otimes \Gamma(X, \mathcal{G}) \to \Gamma(X, \mathcal{F} \otimes G).$$

Sa version dérivée nous donnera le cup produit :

$$\cup : \mathbb{H}^i(X, \mathcal{F}) \otimes \mathbb{H}^j(X, \mathcal{G}) \to \mathbb{H}^{i+j}(X, \mathcal{F} \otimes^L \mathcal{G}).$$ [4]

Plus précisément, soient

- $\mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}$ une résolution plate de $\mathcal{F}$;
- $\mathcal{F}_1 \to \mathbb{J}^\bullet(\mathcal{F}_1)$ la résolution de Godement *tronquée* de $\mathcal{F}_1$;
- $\mathcal{G} \to \mathbb{J}^\bullet(\mathcal{G})$ la résolution de Godement *tronquée* de $\mathcal{G}$.

4. Normalement, le foncteur dérivé $\mathrm{R}\Gamma(X, -)$ est défini uniquement dans $\mathbb{D}^+(X, \Lambda)$. Ici, puisque X/k est de type fini sur un corps algébriquement clos, on sait que ce foncteur est de dimension cohomologique finie, par suite, le foncteur $\mathrm{R}\Gamma(X, -)$ peut s'étendre en un foncteur $\mathrm{R}\Gamma(X, -) : \mathbb{D}(X, \Lambda) \to \mathbb{D}(X, \Lambda)$, donc on peut parler des hyper-cohomologies d'un complexe borné supérieurement.

On définit le cup produit via le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{H}^i(X,\mathcal{F})\otimes\mathbb{H}^j(X,\mathcal{G}) \arrow[rr, "\cup"] & & \mathbb{H}^{i+j}(X,\mathcal{F}\otimes^L\mathcal{G}) \\
\mathbb{H}^i(X,\mathcal{F}_1)\otimes\mathbb{H}^j(X,\mathcal{G}) \arrow[u, "\simeq"'] \arrow[d, "\simeq"'] & & \mathbb{H}^{i+j}\left(X,\mathcal{F}_1\otimes\mathcal{G}\right) \arrow[u, "\simeq"'] \arrow[d, "\simeq"] \\
\mathrm{H}^i\Gamma(X,\mathbb{J}^\bullet(\mathcal{F}_1))\otimes\mathrm{H}^j\Gamma(X,\mathbb{J}^\bullet(\mathcal{G})) \arrow[d, "1.1.2"] & & \mathbb{H}^{i+j}\left(X,\mathbb{J}^\bullet(\mathcal{F}_1)\otimes\mathcal{G}\right) \arrow[d, "\simeq"] \\
\mathrm{H}^{i+j}\left(\Gamma\left(X,\mathbb{J}^\bullet(\mathcal{F}_1)\right)\otimes\Gamma\left(\mathbb{J}^\bullet(\mathcal{G})\right)\right) \arrow[r, "\mathrm{can}"] & \mathrm{H}^{i+j}\left(\Gamma\left(X,\mathbb{J}^\bullet(\mathcal{F}_1)\otimes\mathbb{J}^\bullet(\mathcal{G})\right)\right) \arrow[r] & \mathbb{H}^{i+j}\left(X,\mathbb{J}^\bullet(\mathcal{F}_1)\otimes\mathbb{J}^\bullet(\mathcal{G})\right)
\end{tikzcd}$$

1.3.2 Dans la construction ci-dessus, au lieu de prendre la résolution de Godement tronquée $\mathbb{J}^\bullet(\mathcal{F}_1)$ de $\mathcal{F}_1$ (resp. $\mathbb{J}^\bullet(\mathcal{G})$ de $\mathcal{G}$), on peut aussi prendre une résolution plate et $\Gamma(X,-)$-acyclique bornée supérieurement $\mathcal{F}_1\to\mathcal{F}_1'$ de $\mathcal{F}_1$ (resp. une résolution $\Gamma(X,-)$-acyclique bornée supérieurement $\mathcal{G}\to\mathcal{G}'$ de $\mathcal{G}$), et on obtiendra la même construction.

1.3.3 Si on se donne $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ et $\mathcal{M}$ trois objets de $\mathbb{D}^-(X,\Lambda)$, et un morphisme

$$\mathcal{F}\otimes^L\mathcal{G}\to\mathcal{M}.$$

On appelle aussi le cup produit le morphisme composé suivant :

$$\mathbb{H}^i(X,\mathcal{F})\otimes\mathbb{H}^j(X,\mathcal{G})\xrightarrow[1.3.1]{\cup}\mathbb{H}^{i+j}(X,\mathcal{F}\otimes^L\mathcal{G})\longrightarrow\mathbb{H}^{i+j}(X,\mathcal{M})$$

En particulier, on a la forme usuelle de cup produit :

$$\mathbb{H}^i(X,\mathcal{F})\otimes\mathbb{H}^j(X,\mathcal{G})\xrightarrow[1.3.1]{\cup}\mathbb{H}^{i+j}(X,\mathcal{F}\otimes^L\mathcal{G})\xrightarrow{\mathrm{can}}\mathbb{H}^{i+j}(X,\mathcal{F}\otimes\mathcal{G})$$

1.3.4 Notons $\Lambda=\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Soit $j:U\hookrightarrow Y$ une immersion ouverte de schémas vérifiant la propriété suivante : il existe un entier $N\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ tel que pour tout faisceau de Λ-modules $\mathcal{F}$ sur U, on ait

$$\mathrm{R}^q j_*\mathcal{F}=0$$

dès que $q\geq N+1$. En particulier, on peut définir le foncteur dérivé

$$\mathrm{R}j_*:\mathbb{D}(Y,\Lambda)\to\mathbb{D}(Y,\Lambda)$$

qui envoie $\mathbb{D}^-(Y,\Lambda)$ en $\mathbb{D}^-(Y,\Lambda)$. Soient $F,G\in\mathbb{D}^-(U,\Lambda)$, le morphisme canonique

$$j_!(F\otimes^L G)\to\mathrm{R}j_*F\otimes^L j_!G$$

est un isomorphisme. Pour le vérifier, quitte à remplacer F par une résolution bornée supérieurement qui est acyclique pour le foncteur j_*, et G par une résolution plate bornée supérieurement, on peut supposer que le complexe F est flasque et que G est plat, on en déduit donc

$$j_!(F\otimes^L G)=j_!(F\otimes G)\simeq j_*F\otimes j_!G=\mathrm{R}j_*F\otimes^L j_!G.$$

D'où l'assertion.

1.3.5 Gardons les notations du numéro 1.3.1, et soit $j:X\hookrightarrow\overline{X}$ une compactification de X sur k. Compte tenu de la dimension cohomologique d'un schéma de type fini sur un corps algébriquement clos, cette immersion ouverte j vérifie la condition de 1.3.4.[5] Par conséquent, on peut définir

$$\cup : \mathbb{H}^i(X, \mathcal{F}) \otimes \mathbb{H}^j_c(X, \mathcal{G}) \to \mathbb{H}^{i+j}_c(X, \mathcal{F} \otimes^L \mathcal{G}).$$

Plus précisément, on le définit via le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{H}^i(X, \mathcal{F}) \otimes \mathbb{H}^j_c(X, \mathcal{G}) \arrow[rr, "\cup"] \arrow[d, "\simeq"] & & \mathbb{H}^{i+j}_c(X, \mathcal{F} \otimes^L \mathcal{G}) \arrow[d, equal] \\
\mathbb{H}^i(\overline{X}, \mathrm{R}j_*\mathcal{F}) \otimes \mathbb{H}^j(\overline{X}, j_!\mathcal{G}) \arrow[r, "1.3.1"] & \mathbb{H}^{i+j}(\overline{X}, \mathrm{R}j_*\mathcal{F} \otimes^L j_!\mathcal{G}) & \mathbb{H}^{i+j}(\overline{X}, j_!(\mathcal{F} \otimes^L \mathcal{G})) \arrow[l, "1.3.4"', "\simeq"]
\end{tikzcd}$$

En composant avec le morphisme canonique dans la catégorie dérivée

$$\mathcal{F} \otimes^L \mathcal{G} \to \mathcal{F} \otimes \mathcal{G},$$

on obtient donc

$$\mathbb{H}^i(X, \mathcal{F}) \otimes \mathbb{H}^j_c(X, \mathcal{G}) \xrightarrow{\cup} \mathbb{H}^{i+j}_c(X, \mathcal{F} \otimes^L \mathcal{G}) \xrightarrow{\text{can}} \mathbb{H}^{i+j}_c(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}) .$$

2. Morphisme trace

2.1 Morphisme trace en dimension 1

2.1.1 Soit X/k une courbe lisse séparée *connexe* sur un corps k algébriquement clos. Notons $j : X \to \overline{X}$ une compactification lisse de X sur k, et $i : D \hookrightarrow \overline{X}$ le complémentaire. Soit $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ un entier *inversible* sur X, et posons $\Lambda = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On a alors la suite exacte suivante :

$$0 \to j_!\mu_{n,X} \to \mu_{n,\overline{X}} \to i_*\mu_{n,D} \to 0,$$

d'où la suite exacte longue de groupes de cohomologie :

$$\cdots \to \mathrm{H}^1(\overline{X}, i_*\mu_{n,D}) \to \mathrm{H}^2_c(X, \mu_{n,X}) \to \mathrm{H}^2(\overline{X}, \mu_{n,\overline{X}}) \to \mathrm{H}^2(\overline{X}, i_*\mu_{n,D}) \to \cdots .$$

Comme le morphisme i est une immersion fermée, et que le schéma D est fini sur k, on a

$$\mathrm{H}^i(\overline{X}, i_*\mu_{n,D}) = 0 \qquad \text{pour } i \geq 1.$$

On obtient ainsi un isomorphisme canonique

$$\mathrm{H}^2_c(X, \mu_{n,X}) \simeq \mathrm{H}^2(\overline{X}, \mu_{n,\overline{X}}).$$

D'autre part, il existe des isomorphismes canoniques

$$\mathrm{H}^2(\overline{X}, \mu_{n,\overline{X}}) \xleftarrow{\simeq} \mathrm{Pic}(\overline{X})/n\mathrm{Pic}(\overline{X}) \xrightarrow[\simeq]{\deg} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} .$$

On définit enfin le *morphisme trace*

$$\mathrm{Tr}_{X/k} : \mathrm{H}^2_c(X, \mu_n) \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

comme le composé des morphismes suivants :

$$\mathrm{H}^2_c(X, \mu_{n,X}) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{H}^2(\overline{X}, \mu_{n,\overline{X}}) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Pic}(\overline{X})/n\mathrm{Pic}(\overline{X}) \xrightarrow[\simeq]{\deg} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

En particulier, sous l'hypothèse de connexité de X, ce morphisme trace est en fait un *isomorphisme*.

5. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de Λ-modules sur X, on a $\mathrm{R}^i j_*\mathcal{F} = 0$ pour $i > 2 \cdot \dim(X)$. En effet, soit $\bar{y} \in \overline{X} - X$ un point géométrique, alors

$$\left(\mathrm{R}^i j_*\mathcal{F}\right)_{\bar{y}} = \varinjlim_{U \text{voisinage étale de } \bar{y} \in \overline{X}} \mathrm{H}^i(X \times_{\overline{X}} U, \mathcal{F})$$

Or $\dim(X \times_{\overline{X}} U) = \dim(X)$, donc $\left(\mathrm{R}^i j_*\mathcal{F}\right)_{\bar{y}} = 0$ pour $i > 2\dim(X)$. Par suite, $\mathrm{R}^i j_*(\mathcal{F}) = 0$ pour $i > 2\dim(X)$.

2.1.2 Soit maintenant X/k une courbe lisse séparée définie sur k. Notons $\pi_0(X)$ les groupes des composantes connexes de X. On a alors

$$X = \coprod_{i \in \pi_0(X)} X_i$$

avec X_i la composante connexe correspondante. Par suite

$$\mathrm{H}^2_c(X, \mu_{n,X}) = \bigoplus_{i \in \pi_0(X)} \mathrm{H}^2_c(X_i, \mu_{n,X_i})$$

Le morphisme trace $\mathrm{Tr}_{X/k}$ pour la courbe X/k est alors défini comme le composé des morphismes suivants :

$$\mathrm{H}^2_c(X, \mu_{n,X}) \xrightarrow{\simeq} \bigoplus_{i \in \pi_0(X)} \mathrm{H}^2_c(X_i, \mu_{n,X_i}) \xrightarrow{\bigoplus \mathrm{Tr}_{X_i/k}} \bigoplus_{i \in \pi_0(X)} \Lambda \xrightarrow{\Sigma} \Lambda$$

2.2 Morphisme trace en dimension relative zéro

2.2.1 Soit $f : X \to S$ un morphisme fini étale de schémas, $\mathcal{F}$ un faisceau sur S. On se propose de définir un morphisme de faisceaux, appelé *morphisme trace* :

$$f_* f^* \mathcal{F} \to \mathcal{F}.$$

Le morphisme trace est caractérisé par les deux propriétés suivantes :

i) Il est de caractère local pour la topologie étale sur S ;

ii) Si X est somme disjointe de d copies de S, de sorte que $f_* f^* \mathcal{F} \simeq \mathcal{F}^{\oplus^d}$, la trace est l'application somme

$$\mathcal{F}^{\oplus^d} \to \mathcal{F}.$$

L'unicité est triviale à partir de (i) et (ii) puisque tout morphisme fini étale $X \to S$ est localement constant. Ayant l'unicité, l'existence s'ensuit par l'arguement de descente.

2.2.2 Plus généralement, on peut d'une et d'une seule façon définir, pour tout morphisme $f : X \to S$, séparé, plat de présentation finie et quasi-fini, et tout faisceau abélien $\mathcal{F}$ sur S, un morphisme trace

$$\mathrm{Tr}_f : f_! f^* \mathcal{F} \to \mathcal{F}$$

vérifie (beaucoup) des condtions de compatibilité. Par exemple, ce morphisme trace est de caractère local pour la topologie étale, et vérifie la condition de normalisation : si f est fini de rang constant n, l'homomorphisme composé

$$\mathcal{F} \longrightarrow f_* f^* \mathcal{F} = f_! f^* \mathcal{F} \xrightarrow{\mathrm{Tr}_f} \mathcal{F} .$$

De plus, cette définition coïncide avec celle donnée dans 2.2.1 lorsque le morphisme $f : X \to S$ est fini et étale. On renvoie à [1] Exposé XVII §6.2 pour les détails.

2.2.3 On considère ici un cas particulier de la construction précédente. Soit $S = \mathrm{Spec}(R)$ avec R un anneau de valuation discrète strictement hensélien. Notons $\eta \in S$ le point générique, $s \in S$ le point fermé et $I = \mathrm{Gal}(\overline{k(\eta)}/k(\eta))$ le groupe de Galois. Alors la donnée d'un faisceau $\mathcal{F}$ est la même chose que la donnée d'un triple $(\mathcal{F}_{\bar\eta}, \mathcal{F}_s, \sigma : \mathcal{F}_s \to \mathcal{F}_{\bar\eta})$ avec $\mathcal{F}_{\bar\eta}$ un I-module (continu pour la topologie discrète de $\mathcal{F}_{\bar\eta}$), $\mathcal{F}_s$ un groupe (sur lequel I agit trivialement) et

$$\sigma : \mathcal{F}_s \to \mathcal{F}_{\bar\eta}$$

un morphisme de I-modules.

Soit maintenant $K'/k(\eta)$ une extension fini séparable de degré d de $k(\eta)$. Notons R' la clôture intégrale de R dans K', et $S' = \mathrm{Spec}(R') = \{\eta', s'\}$. On se propose de décrire explicitement le morphisme trace

$$\mathrm{Tr}_f : f_* f^* \mathcal{F} \to \mathcal{F}$$

avec $f : S' \to S$ le morphisme canonique, et $\mathcal{F}$ un faisceau abélien sur S donnée par le triple $(\mathcal{F}_{\bar\eta}, \mathcal{F}_s, \sigma)$. Par conséquent, le faisceau $f_* f^* \mathcal{F}$ est donné par le triple $(\mathcal{F}_{\bar\eta}^{\oplus^d}, \mathcal{F}_s, \sigma')$ avec σ' est le morphisme composé suivant :

$$\mathcal{F}_s \xrightarrow{\sigma} \mathcal{F}_{\bar\eta} \xrightarrow{\text{diagonal}} \mathcal{F}_{\bar\eta}^{\oplus^d}$$

Par suite, le morphisme trace dans ce cas est explicité par le carré commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}_s \arrow[r, "\sigma"] \arrow[rr, bend left, "\sigma'"] \arrow[d, "\text{multiplication par } d"'] & \mathcal{F}_{\bar\eta} \arrow[r, "\text{diagonal}"] & \mathcal{F}_{\bar\eta}^{\oplus^d} \arrow[d, "\Sigma"] \\
\mathcal{F}_s \arrow[rr, "\sigma"] & & \mathcal{F}_{\bar\eta}
\end{tikzcd}$$

2.3 Morphisme trace en dimension supérieure, une esquisse

2.3.1 Soit X/k un morphisme de type fini séparé sur un corps algébriquement clos, purement de dimension d. Notons $\Lambda = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ inversible sur X, et $\Lambda(d) = \mu_n^{\otimes^d}$. On peut alors d'une et d'une seule manière définir un morphisme trace

$$\mathrm{Tr}_{X/k} : \mathrm{H}_c^{2d}(X, \Lambda(d)) \to \Lambda.$$

vérifiant divers conditions de compactibilité. On va esquisser ci-après (§2.3.2-§2.3.6) une construction de morphisme trace.

2.3.2 Soit $j : U \hookrightarrow X$ un ouvert *dense* de X, de sorte que le complémentaire $D := X - U$ est de dimension $< d$. Le morphisme canonique suivant est alors un *isomorphisme* :

$$\alpha : \mathrm{H}_c^{2d}(U, \Lambda(d)) \to \mathrm{H}_c^{2d}(X, \Lambda(d)).$$

En effet, on a d'abord la suite exacte courte de faisceaux sur X suivante :

$$0 \to j_! \Lambda(d) \to \Lambda(d) \to i_* \Lambda \to 0$$

avec $i : D \hookrightarrow$ l'immersion fermée. On en déduit donc la suite exacte longue :

$$\cdots \to \mathrm{H}_c^{2d-1}(X, i_*\Lambda(d)) \to \mathrm{H}_c^{2d}(U, \Lambda(d)) \to \mathrm{H}_c^{2d}(X, \Lambda(d)) \to \mathrm{H}_c^{2d}(X, i_*\Lambda(d)) \to \cdots.$$

Or comme $i : D \hookrightarrow X$ est une immersion fermée, on a

$$\mathrm{H}_c^i(X, i_*\Lambda(d)) \simeq \mathrm{H}_c^i(D, \Lambda(d)),$$

donc compte tenue de la dimension cohomologique d'un schéma de type fini sur un corps algébriquement clos, on a

$$\mathrm{H}_c^i(X, i_*\Lambda(d)) \simeq \mathrm{H}_c^i(D, \Lambda(d)) = 0 \quad \text{dès que } i > 2d-2,$$

d'où l'assertion. Par conséquent, une fois qu'on a défini le morphisme trace pour U/k, le morphisme trace pour X/k s'en déduit comme le morphisme composé :

$$\mathrm{H}_c^{2d}(X, \Lambda(d)) \xrightarrow{\alpha^{-1}} \mathrm{H}_c^{2d}(U, \Lambda(d)) \xrightarrow{\mathrm{Tr}_{U/k}} \Lambda.$$

2.3.3 D'après le numéro précédent, quitte à remplacer X par un ouvert dense de X, on peut supposer que X s'écrit comme somme disjointe de ses composantes *irréductibles* :

$$X = \coprod_i X_i.$$

Il suffit alors de définir le morphisme trace pour chaque composante X_i. En effet, on prend alors

$$\mathrm{Tr}_{X/k} = \sum_i \mathrm{Tr}_{X_i/k} : \mathrm{H}_c^{2d}(X, \Lambda(d)) = \bigoplus_i \mathrm{H}_c^{2d}(X_i, \Lambda(d)) \to \Lambda.$$

Par suite, pour définir le morphisme trace, on peut supposer X irréductible.

2.3.4 Quitte à diminuer encore X, on peut supposer qu'il existe une factorisation suivante :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f"'] & \mathbb{A}_k^d \arrow[dl] \\ \mathrm{Spec}(k) & \end{tikzcd}$$

avec $\pi : X \to \mathbb{A}_k^1$ étale. Supposons d'abord qu'on a défini le morphisme trace pour un espace affine, on pose alors $\mathrm{Tr}_{X/k}$ comme le composé suivant :

$$\mathrm{H}_c^{2d}(X, \Lambda(d)) \xrightarrow{\mathrm{Tr}_\pi} \mathrm{H}_c^{2d}(X, \pi_!\Lambda(d)) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{H}_c^{2d}(\mathbb{A}_k^d, \Lambda(d)) \xrightarrow{\mathrm{Tr}_{\mathbb{A}_k^d/k}} \Lambda$$

où Tr_π est le morphisme trace défini dans 2.2.

2.3.5 Pour $X = \mathbb{A}_k^d$, on dispose alors l'isomorphisme de Künneth

$$\mathrm{H}_c^{2d}(\mathbb{A}_k^d, \Lambda(d)) \simeq \mathrm{H}_c^2(\mathbb{A}_k^1, \Lambda(1))^{\otimes^d}.$$

Le morphisme trace pour l'espace affine est alors donné par

$$\mathrm{H}_c^{2d}(\mathbb{A}_k^d, \Lambda(d)) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{H}^2(\mathbb{A}_k^1, \Lambda(1))^{\otimes^d} \xrightarrow{\mathrm{Tr}_{\mathbb{A}_k^1/k}^{\otimes^d}} \Lambda$$

avec $\mathrm{Tr}_{\mathbb{A}_k^1/k}$ le morphisme trace pour la droite affine défini dans 2.1.

2.3.6 En combinant les dévissages faits dans §2.3.2-§2.3.5, on obtient un "morphisme trace"

$$\mathrm{Tr}_{X/k} : \mathrm{H}_c^{2d}(X, \Lambda(d)) \to \Lambda$$

Mais le point pénible ici est de vérifier que cette construction est indépendante des choix auxillaires faits précédemment, et le morphisme aisni obtenu vérifie divers conditions de compactiblité. On renvoie le lecteur à [1] Exposé XVIII pour les détails.

3. Dualité de Poincaré, énoncés

Soit X/k un schéma propre lisse connexe de dimension d sur un corps k *algébriquement clos*. Soit $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ un entier inversible sur X. Posons $\Lambda = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $\Lambda(d) = \mu_n^{\otimes^d}$. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau constructible de Λ-modules sur X. Le cup produit induit alors le morphisme suivant

$$\cup : \mathrm{H}^i(X, \mathcal{F}) \otimes \mathbb{H}^{2d-i}(X, \mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{F}, \Lambda(d))) \to \mathbb{H}^{2d}(X, \mathcal{F} \otimes^L \mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{F}, \Lambda(d))) \to \mathrm{H}^{2d}(X, \Lambda(d)).$$

En composant avec le morphisme trace, on obtient l'accouplement canonique suivant :

$$\mathrm{H}^i(X, \mathcal{F}) \otimes \mathbb{H}^{2d-i}(X, \mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{F}, \Lambda(d))) \longrightarrow \mathrm{H}^{2d}(X, \Lambda(d)) \xrightarrow{\mathrm{Tr}_{X/k}} \Lambda$$

Théorème 3.1 (Dualité de Poincaré) *L'accouplement ci-dessus est* parfait.

Soit maintenant $j : U \to X$ une immersion ouverte non vide. Soit $\mathcal{E}$ un faisceau localement constant constructible sur U (on dit alors que le faisceau $\mathcal{E}$ est *lisse* sur U). Posons $\mathcal{F} = j_!\mathcal{E}$, qui est donc constructible sur X. De plus, on peut vérifier qu'on a un isomorphisme canonique suivant

$$\mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}(j_!\mathcal{E}, \Lambda(d))) \simeq \mathrm{R}j_*\mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{E}, \Lambda(d))) \simeq \mathrm{R}j_*\mathcal{E}^\vee(d)$$

avec $\mathcal{E}^\vee(d) = \underline{\mathrm{Hom}}(E, \Lambda(d))$. L'accouplement ci-dessus induit alors l'accouplement suivant

$$\mathrm{H}^i_c(U, \mathcal{E}) \otimes \mathrm{H}^{2d-i}(U, \mathcal{E}^\vee(d)) \longrightarrow \mathrm{H}^{2d}_c(U, \Lambda(d)) \xrightarrow{\mathrm{Tr}_{X/k}} \Lambda$$

on obtient donc un le corollaire suivant

Corollaire 3.2 *Cet accouplement est aussi parfait.*

On donnera ci-après une preuve de ce corollaire en dimension 1 dans §4.2, et aussi une esquisse de la preuve du théorème 3.1 en dimension 1 dans §5. On renvoie le lecteur interéssé à [1] exposé XVIII pour le cas de dimension supérieure.

4. Preuve du corollaire 3.2 en dimension 1

Soient X/k une courbe lisse connexe séparée sur un corps k, $\Lambda = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec n inversible sur X. Soit $\mathcal{E}$ un faisceau lisse de Λ-modules sur X, on définit

$$'\mathrm{H}^i(X, \mathcal{E}) = \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{H}^{2-i}_c(X, \mathcal{E}^\vee(1)), \Lambda)$$

et

$$\Psi^i(X, \mathcal{E}) : \mathrm{H}^i(X, \mathcal{E}) \to {}'\mathrm{H}^i(X, \mathcal{E})$$

le morphisme induit par l'accouplement du dualité de Poincaré :

$$\mathrm{H}^{2-i}_c(X, \mathcal{E}^\vee(1)) \otimes \mathrm{H}^i(X, \mathcal{E}) \longrightarrow \mathrm{H}^2_c(X, \Lambda(1)) \xrightarrow{\mathrm{Tr}_{X/k}} \Lambda$$

Le but de cette section est donc de présenter une preuve détaillée du résultat suivant :

Théorème 4.1 *Pour chaque $i \in \mathbb{Z}$ et chaque faisceau lisse E de Λ-modules sur X, le morphisme $\Psi^i(X, \mathcal{E})$ défini ci-dessus est un* isomorphisme.

La preuve donnée ici est celle d'Artin exposée par Deligne dans [2] (page 158-160). On la divise en 8 étapes.

4.2 Preuve du théorème 4.1

Etape 1. Soient

$$0 \to \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_3 \to 0$$

une suite exacte de faisceaux lisses sur X. Elle induit alors une suite exacte longue :

$$\cdots \to {}'\mathrm{H}^i(X, \mathcal{E}_1) \to {}'\mathrm{H}^i(X, \mathcal{E}_2) \to {}'\mathrm{H}^i(X, \mathcal{E}_3) \to {}'\mathrm{H}^{i+1}(X, \mathcal{E}_1) \to \cdots.$$

En effet, il suffit de remarquer que le Λ-module Λ est injectif.

Etape 2. *Le morphisme $\Psi^i(X, \mathcal{E})$ est un isomorphisme si $i < 0$ ou $i > 2$.* Traitons d'abord le cas où $i < 0$. Il est alors clair que

$$\mathrm{H}^i(X, \mathcal{E}) = 0.$$

D'autre part, comme X/k est une courbe sur un corps k algébriquement clos, on a

$$\mathrm{H}^j_c(X, \mathcal{E}^\vee(d)) = 0, \quad \text{si } j > 2.$$

Donc, on a

$$'\mathrm{H}^i(X, \mathcal{E}) = \mathrm{Hom}_\Lambda\left(\mathrm{H}^{2-i}_c(X, \mathcal{E}^\vee(d)), \Lambda\right) = 0$$

pour $i < 0$. En particulier, le morphisme $\Psi^i(X, \mathcal{E})$ est un isomorphisme pour $i < 0$. Le cas où $i > 2$ se démontre de la même manière.

Etape 3. Il s'agit de prouver le lemme suivant :

Lemme 4.2.1 *Soient $\phi : X' \to X$ un morphisme fini étale, et $\mathcal{E}'$ un faisceau lisse de Λ-modules sur X'. Alors le morphisme $\Psi^i(X', \mathcal{E}')$ est un isomorphisme si et seulement si $\Psi^i(X, \phi_*\mathcal{E}')$ est un isomorphisme.*

Démonstration. On considère le morphisme composé suivant

$$\Phi : \phi_*\mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{E}', \Lambda(1)) \to \mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}(\phi_*\mathcal{E}', \phi_*\Lambda(1)) \to \mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}(\phi_*\mathcal{E}', \Lambda(1)),$$

dont le deuxième morphisme est induit par le morphisme trace (2.2.1)

$$\theta = \mathrm{Tr}_\phi : \phi_*\Lambda(1) \to \Lambda(1).$$

Montrons d'abord que Φ est un isomorphisme. C'est une question locale pour la topologie étale, par suite, quitte à remplacer X par un revêtement fini étale, on peut supposer que le schéma X' se décompose en somme disjointe de m copies de X, indexés par $i \in \{1, 2, \cdots, m\}$:

$$X' = \coprod_i X_i.$$

Par conséquent, θ est donné par

$$\theta : \phi_*\Lambda(1) = \Lambda(1)^{\oplus^m} \to \Lambda(1), \qquad (x_i)_{i=1,\cdots,m} \mapsto \sum_{i=1}^m x_i.$$

Avec cette description explicite, on en déduit que le morphisme Φ est un isomorphisme. On a donc le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^i(X', \mathcal{E}') \otimes \mathbb{H}^{2-i}_c(X', \mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{E}', \Lambda(1))) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & \mathbb{H}^2_c(X', \mathcal{E}' \otimes^L \mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{E}', \Lambda(1)))) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & \mathrm{H}^2_c(X', \Lambda(1)) \arrow[d, "\simeq"] \\
\mathrm{H}^i(X, \phi_*\mathcal{E}') \otimes \mathbb{H}^{2-i}_c(X, \phi_*\mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{E}', \Lambda(1))) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathbb{H}^2_c\left(X, \phi_*\left(\mathcal{E}' \otimes^L \mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{E}', \Lambda(1))\right)\right) \arrow[r] & \mathrm{H}^2_c(X, \phi_*\Lambda(1)) \arrow[d, equal] \\
\mathrm{H}^i(X, \phi_*\mathcal{E}') \otimes \mathbb{H}^{2-i}_c(X, \phi_*\mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{E}', \Lambda(1))) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dd, bend left, "\text{iso. induit par } \Phi"] & \mathbb{H}^2_c\left(X, \phi_*\mathcal{E}' \otimes^L \phi_*\mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{E}', \Lambda(1)\right) \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] \arrow[dd, bend left, "\text{iso. induit par } \Phi"] & \mathrm{H}^2_c(X, \phi_*\Lambda(1)) \arrow[d, equal] \\
\mathrm{H}^i(X, \phi_*\mathcal{E}') \otimes \mathbb{H}^{2-i}_c(X, \mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}(\phi_*\mathcal{E}', \phi_*\Lambda(1))) \arrow[r] \arrow[d, "\text{induit par } \theta"'] & \mathbb{H}^2_c\left(X, \phi_*\mathcal{E}' \otimes^L \mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}(\phi_*\mathcal{E}', \phi_*\Lambda(1)\right) \arrow[r] \arrow[d, "\text{induit par } \theta"'] & \mathrm{H}^2_c(X, \phi_*\Lambda(1)) \arrow[d, "\text{induit par } \theta"'] \\
\mathrm{H}^i(X, \phi_*\mathcal{E}') \otimes \mathbb{H}^{2-i}_c(X, \mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}(\phi_*\mathcal{E}', \Lambda(1))) \arrow[r] & \mathbb{H}^2_c\left(X, \phi_*\mathcal{E}' \otimes^L \mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}(\phi_*\mathcal{E}', \Lambda(1)\right) \arrow[r] & \mathrm{H}^2_c(X, \Lambda(1))
\end{tikzcd}$$

D'autre part, prouvons que le diagramme suivant est aussi commutatif :[6] :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}^2_c(X', \Lambda(1)) \arrow[rr, "\mathrm{Tr}_{X'/k}"] \arrow[d, "\simeq"'] & & \Lambda . \\ \mathrm{H}^2_c(X, \phi_*\Lambda(1)) \arrow[d, "\text{induit par } \theta"'] & & \\ \mathrm{H}^2_c(X, \Lambda(1)) \arrow[uurr, "\mathrm{Tr}_{X/k}"'] & & \end{tikzcd}$$

En effet, pour cela, on peut supposer X' connexe. Notons $\overline{X'}$ et $\overline{X}$ respectivement les compactifications lisses de X' et de X. Le morphisme $\phi : X' \to X$ s'étend en un morphisme fini génériquement étale $\bar{\phi} : \overline{X'} \to \overline{X}$. On dispose encore un morphisme trace

$$\bar{\theta} = \mathrm{Tr}_{\bar{\phi}} : \bar{\phi}_*\Lambda(1) \to \Lambda(1).$$

Par fonctorialité de morphisme trace, il suffit donc de vérifier que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}^2(\overline{X'}, \Lambda(1)) \arrow[r, "\mathrm{Tr}_{\overline{X'}/k}"] \arrow[d, "\text{induit par } \theta"'] & \Lambda \\ \mathrm{H}^2(\overline{X}, \Lambda(1)) \arrow[ur, "\mathrm{Tr}_{\overline{X}/k}"'] & \end{tikzcd} \tag{1}$$

Or sous les identifications canoniques suivantes :

$$\mathrm{H}^2(\overline{X'}, \Lambda(1)) \simeq \mathrm{Pic}(\overline{X'})/n\mathrm{Pic}(\overline{X'}), \qquad \text{et} \qquad \mathrm{H}^2(\overline{X}, \Lambda(1)) \simeq \mathrm{Pic}(\overline{X})/n\mathrm{Pic}(\overline{X}),$$

l'image de $\mathcal{O}_{X'}(x')$ dans $\mathrm{H}^2(\overline{X'}, \Lambda(1))$ est envoyée par θ en l'image de $\mathcal{O}_X(\phi(x'))$ dans $\mathrm{H}^2(\overline{X}, \Lambda(1))$.[7] D'où la commutativité du diagramme (1) ci-dessus. Par conséquent, on obtient le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}^i(X', \mathcal{E}') \arrow[r, "\Psi^i(X',\mathcal{E}')"] \arrow[d, "\simeq"'] & {}'\mathrm{H}^i(X', \mathcal{E}') \arrow[d, "\simeq"] \\ \mathrm{H}^i(X, \phi_*\mathcal{E}') \arrow[r, "\Psi^i(X,\phi_*\mathcal{E}')"] & {}'\mathrm{H}^i(X, \phi_*\mathcal{E}') \end{tikzcd}$$

où le premier isomorphisme vertical est juste l'identification canonique, et le deuxième est induit par Φ. D'où le lemme. □

Etape 4. *Pour $i \in \{0, 2\}$, le morphisme $\Psi^i(X, \Lambda)$ est un isomorphismes.* Traitons d'abord le cas où $i = 0$. L'accouplement de dualité s'écrit alors sous la forme suivante :

$$\mathrm{H}^2_c(X, \Lambda(1)) \otimes \mathrm{H}^0(X, \Lambda) \xrightarrow{\cup} \mathrm{H}^2_c(X, \Lambda(1)) \xrightarrow{\mathrm{Tr}_{X/k}} \Lambda$$

Un calcul nous montre que le cup produit ci-dessus est donné par : quelques soient $\alpha \in \mathrm{H}^2_c(X, \Lambda(1))$ et $\lambda \in \mathrm{H}^0(X, \Lambda) = \Lambda$, on a $\alpha \cup \lambda = \alpha$. Il en résulte que la première flèche ci-dessus est un isomorphisme. Pour conclure, il nous reste à utiliser le fait que, pour une courbe *connexe*, le morphisme trace est un isomorphisme. D'où le cas où $i = 0$. Traitons ensuite le cas où $i = 2$. Lorsque la courbe X/k est *affine*, il n'y a rien à démontrer compte tenu de la dimension cohomologique d'une courbe affine.

6. En effet, ceci résulte simplement de la propriéé de compactibilité du morphisme trace

7. Le morphisme $\mathrm{Pic}(X') \to \mathrm{Pic}(X)$ induit par le morphisme trace $\phi_*\mathbb{G}_{m,X'} \to \mathbb{G}_{m,X}$ est le morphisme de norme : $\forall \mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(X') \mapsto \det(\phi_*\mathcal{L})$.

On peut donc supposer X/k est *propre*. On se ramène à vérifier que le cup produit suivant est un isomorphisme

$$\mathrm{H}^0(X, \Lambda(1)) \otimes \mathrm{H}^2(X, \Lambda) \xrightarrow{\cup} \mathrm{H}^2(X, \Lambda(1))$$

En utilisant un isomorphisme (non canonique) $\Lambda(1) \simeq \Lambda$ (et la fonctorielité de la contruction), il suffit de vérifier que le morphisme suivant est un isomorphisme :

$$\cup : \mathrm{H}^0(X, \Lambda) \otimes \mathrm{H}^2(X, \Lambda(1)) \to \mathrm{H}^2(X, \Lambda(1)).$$

Un calcul nous donne alors le résultat. Comme corollaire, on a

Lemme 4.2.2 *Soient $\phi : X' \to X$ un morphisme fini étale, $\mathcal{C}'$ un faisceau constant sur X, dont les fibres géométriques sont libres de rang fini sur Λ. Alors $\Psi^i(X, \phi_*\mathcal{C}')$ est un isomorphisme.*

Etape 5. *Quelque soit $\mathcal{E}$ un faisceau lisse de Λ-modules sur X, le morphise $\Psi^0(X, \mathcal{E})$ est un isomorphisme.* Pour cela, et aussi pour la suite, on utlisera la construction suivante : soit $\phi_1 : X_1 \to X$ un revêtement fini étale de X tel que le faisceau induit $\phi_1^*\mathcal{E}$ soit constant. Il existe donc un faisceau constant $\mathcal{C}_1$ de Λ-modules libres, et un prolongement $\phi_1^*\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{C}_1$. D'où une flèche par adjonction :

$$\mathcal{E} \to \phi_{1,*}\mathcal{C}_1.$$

En vérifiant fibre par fibre, on sait que le morphisme ci-dessus est en effet un monomorphisme. Puis on continue cette contruction avec le conoyau du morphisme ci-dessus (qui est encore lisse sur X), on obtient une résolution partielle de longue 1 de $\mathcal{E}$:

$$0 \to \mathcal{E} \to \phi_{1,*}\mathcal{C}_1 \to \phi_{2,*}\mathcal{C}_2$$

avec $\phi_i : X_i \to X$ revêtement fini étale, et $\mathcal{C}_i$ libre de rang fini sur Λ. Avec cette construction, et aussi compte tenu de l'étape 1 et 2, On en déduit donc le diagramme commutatif à lignes exactes suivant :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{H}^0(X, \mathcal{E}) \arrow[r] \arrow[d, "\Psi^0(X,\mathcal{E})"] & \mathrm{H}^0(X, \phi_{1,*}\mathcal{C}_1) \arrow[r] \arrow[d, "\Psi^0(X,\phi_{1,*}\mathcal{C}_1)"] & \mathrm{H}^0(X, \phi_{2,*}\mathcal{C}_2) \arrow[d, "\Psi^0(X,\phi_{2,*}\mathcal{C}_2)"] \\
0 \arrow[r] & {}'\mathrm{H}^0(X, \mathcal{E}) \arrow[r] & {}'\mathrm{H}^0(X, \phi_{1,*}\mathcal{C}_1) \arrow[r] & {}'\mathrm{H}^0(X, \phi_{2,*}\mathcal{C}_2)
\end{tikzcd}.$$

D'après 4.2.2, les dernières deux flèches verticales sont des isomorphismes, il en est donc de même de $\Psi^0(X, \mathcal{E})$.

Etape 6. On a les deux lemmes suivant :

Lemme 4.2.3 *Soit A un anneau commutatif. Considérons le diagramme commutatif de A-modules à lignes exactes suivant :*

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r] \arrow[d, "a"] & \bullet \arrow[r] \arrow[d, "b"] & \bullet \arrow[r] \arrow[d, "c"] & \bullet \arrow[d, "d"] \\
\bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet
\end{tikzcd}$$

i) *Si les morphismes b et d sont injectifs, et a est surjectif, alors le morphisme c est injectif.*

ii) *Si les morphismes a et c sont surjectifs, et d est injectif, alors le morphisme b est surjectif.*

Démonstration. Remarquons que le deuxième énoncé est juste le dual du premier, dont la vérification est laissée au lecteur. □

Lemme 4.2.4 *Soit $\mathcal{F}$ un faiseau lisse sur un schéma Z, et soit $\alpha \in \mathrm{H}^1(Z, \mathcal{F})$. Il existe alors un revêtement fini étale $Z' \to Z$, qui efface α,* i.e., *l'image de $\alpha \in \mathrm{H}^1(Z, \mathcal{F})$ dans $\mathrm{H}^1(Z', \mathcal{F}|_{Z'})$ est nulle.*

Démonstration. Le groupe $\mathrm{H}^1(Z, \mathcal{F})$ classifie les classes d'isomorphismes de torseurs sur X sous $\mathcal{F}$. Par descente, un tel torseur est toujours représentable par un X-schéma fini étale, qui est donc trivialisé par un revêtement fini étale de X. □

Etapt 7. On prouve quelques résultats de finitude ici, qui seront utilisés pour finir la preuve du théorème 4.1.

Lemme 4.2.5 *Soit $m \in \mathbb{Z}_{>1}$ premier à la caractéristique du corps k. Alors Le groupe $\mathrm{H}^1(X, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ est fini, et de cardinal égal au celui du groupe $\mathrm{H}^1_c(X, \mu_m)$.*

Démonstration. Si la courbe X/k est propre, il n'a y rien à démontrer puisque'il existe un isomorphsme de groupes $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \simeq \mu_m$. On peut donc supposer X *affine*. Soit $X \hookrightarrow \overline{X}$ une compactification lisse de X sur k, et notons g le genre de la courbe $\overline{X}/k$, et d le degré du diviseur à l'infini $\overline{X} - X \hookrightarrow \overline{X}$ de $\overline{X}$. Comme

$$\mathrm{H}^1(X, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Hom}(\pi_1(X), \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Hom}(\pi_1^{(p')}(X), \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}).$$

avec $\pi_1^{(p')}(X)$ [8] le plus grand quotient profini d'ordre premier à la caractéristique de k, qui est un pro-p' groupe *libre* de rang égal à $2g + d - 1$. Par conséquent, on a

$$\mathrm{H}^1(X, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Hom}(\pi_1(X), \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \simeq (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^{\oplus^{2g+d-1}}.$$

Quand au groupe $\mathrm{H}^2_c(X, \mu_m)$, en utilisant la suite exacte courte de 2.1.1, on a suite suite exacte longue :

$$0 = \mathrm{H}^0_c(X, \mu_m) \to \mathrm{H}^0(\overline{X}, \mu_m) \to \mathrm{H}^0(\overline{X} - X, \mu_m) \to \mathrm{H}^1_c(X, \mu_m) \to \mathrm{H}^1(\overline{X}, \mu_m) \to \mathrm{H}^1(\overline{X} - X, \mu_m) = 0.$$

Il est bien connu que

$$\mathrm{H}^1(\overline{X}, \mu_m) \simeq \ker(m : \mathrm{Pic}(\overline{X}) \to \mathrm{Pic}(\overline{X})) \simeq (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^{\oplus^{2g}}$$

et que

$$\mathrm{H}^0(\overline{X} - X, \mu_m) \simeq (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^{\oplus^d},$$

on obtient ainsi que le cardinal du groupe $\mathrm{H}^1_c(X, \mu_m)$ est égal à $(2g+d-1)m$. Donc, les deux groupes $\mathrm{H}^1(X, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ et $\mathrm{H}^1_c(X, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ ont le même cardinal, à savoir, $(2g+d-1)m$. Ceci achève la preuve. □

Corollaire 4.2.6 *Soit $\mathcal{C}$ un faisceau étale constant constructible de Λ-modules sur X. Alors les groupes $\mathrm{H}^i(X, \mathcal{C})$ sont tous finis.*

Démonstration. D'après le théorème de finitude pour un morphisme propre, pour établir le résultat, on peut supposer que la courbe X/k est *affine*. En vertu de la dimension cohomologique d'une courbe affine, il suffit donc de prouver que $\mathrm{H}^1(X, \mathcal{C})$ est fini. Or $\mathcal{C}$ est un Λ-module de type fini, il s'écrit comme somme directe finie de faisceaux de type $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ avec m divise n donc inversible sur X. Pour conclure, il suffit donc d'appliquer 4.2.5. □

Corollaire 4.2.7 *Soit $\mathcal{E}$ un faisceau lisse de Λ-module sur X. Il existe alors un revêtement fini étale $\phi : X' \to X$, tel que le morphisme canonique suivant*

$$\mathrm{H}^1(X, \mathcal{E}) \to \mathrm{H}^1(X', \phi^*\mathcal{E})$$

soit nul.

8. Ici, la notation p' signifie toujours premier à la caractéristique du corps k

Démonstration. Quitte à remplacer X par un revêtement fini étale, on peut supposer que le faisceau lisse de Λ-modules $\mathcal{E}$ est *constant* sur X. Par conséquent, compte tenu de 4.2, le groupe $\mathrm{H}^1(X,\mathcal{E})$ est *fini*. Par suite, en utilisant 4.2.4, il existe un revêtement fini étale $X' \to X$ qui efface tous les éléments du groupe *fini* $\mathrm{H}^1(X,\mathcal{E})$. Autrement-dit, le morphisme canonique suivant

$$\mathrm{H}^1(X,\mathcal{E}) \to \mathrm{H}^1(X',\mathcal{E}|_{X'})$$

est nul. D'où le résultat. □

Etape 8 : Fin de la preuve. En utilisant la construction faite dans le début de l'étape 5, il existe une suite exacte courte :

$$0 \to \mathcal{E} \to \phi_*\mathcal{C} \to \mathcal{E}_1 \to 0$$

avec $\phi : X' \to X$ un morphisme fini étale, et $\mathcal{C}$ un faisceau constant libre de rang fini sur Λ. De plus, en vertu du corollaire 4.2.7, quitte à remplacer X' par un revêtement fini étale de X', on peut supposer que le morphisme induit

$$\alpha : \mathrm{H}^1(X,\mathcal{E}) \to \mathrm{H}^1(X,\phi_*\mathcal{C})$$

est *nul*. On considère maintenant le diagramme commutatif à lignes exactes déduit de la suite exacte courte ci-dessus :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{H}^0(X,\mathcal{E}) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"', "\Psi^0(X,\mathcal{E})"] & \mathrm{H}^0(X,\phi_*\mathcal{C}) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"', "\Psi^0(X,\phi_*\mathcal{C})"] & \mathrm{H}^0(X,\mathcal{E}_1) \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\simeq"', "\Psi^0(X,\mathcal{E}_1)"] & \mathrm{H}^1(X,\mathcal{E}) \arrow[r, "\alpha=0"] \arrow[d, "\Psi^1(X,\mathcal{E})"] & \mathrm{H}^1(X,\phi_*\mathcal{C}) \arrow[r] \arrow[d, "\Psi^1(X,\phi_*\mathcal{C})"] & \mathrm{H}^1(X,\mathcal{E}_1) \arrow[d, "\Psi^1(X,\mathcal{E}_1)"] \\
0 \arrow[r] & {}'\mathrm{H}^0(X,\mathcal{E}) \arrow[r] & {}'\mathrm{H}^0(X,\phi_*\mathcal{C}) \arrow[r] & {}'\mathrm{H}^0(X,\mathcal{E}_1) \arrow[r] & {}'\mathrm{H}^1(X,\mathcal{E}) \arrow[r] & {}'\mathrm{H}^1(X,\phi_*\mathcal{C}) \arrow[r] & {}'\mathrm{H}^1(X,\mathcal{E}_1)
\end{tikzcd}$$

Comme $\alpha = 0$, le morphisme β est donc surjectif. Or par l'étape 5, les trois premiers morphismes verticaux sont des isomorphismes, on en déduit que le morphisme $\Psi^1(X,\mathcal{E})$ est *injectif.* Il en est donc de même de $\Psi^1(X,\phi_*\mathcal{C})$ et de $\Psi^1(X,\mathcal{E}_1)$. Or comme $\mathcal{C}$ est constant sur X', d'après 4.2.5, le groupe

$$\mathrm{H}^1(X,\phi_*\mathcal{C}) \simeq \mathrm{H}^1(X',\mathcal{C})$$

et le groupe

$${}'\mathrm{H}^1(X,\phi_*\mathcal{C}) \simeq {}'\mathrm{H}^1(X',\mathcal{C})$$

ont le même cardinal. Il en résulte que le morphisme injectif

$$\Psi^1(X,\phi_*\mathcal{C}) : \mathrm{H}^1(X,\phi_*\mathcal{C}) \to {}'\mathrm{H}^1(X,\phi_*\mathcal{C})$$

est en effet un *isomorphisme.* Par suite, comme les morphismes $\Psi^0(X,\mathcal{E}_1)$ et $\Psi^1(X,\phi_*\mathcal{C})$ sont surjectifs et que le morphisme $\Psi^1(X\,\mathcal{E}_1)$ est injectif, d'après 4.2.3, le morphisme $\Psi^1(X,\mathcal{E})$ est aussi surjectif. Ceci montre que le mophisme $\Psi^1(X,\mathcal{E})$ et donc $\Psi^1(X,\mathcal{E}_1)$ sont des *isomorphismes.* On considère ensuite le diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^1(X,\mathcal{E}) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"', "\Psi^1(X,\mathcal{E})"] & \mathrm{H}^1(X,\phi_*\mathcal{C}) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"', "\Psi^1(X,\phi_*\mathcal{C})"] & \mathrm{H}^1(X,\mathcal{E}_1) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"', "\Psi^1(X,\mathcal{E}_1)"] & \mathrm{H}^2(X,\mathcal{E}) \arrow[r] \arrow[d, "\Psi^2(X,\mathcal{E})"] & \mathrm{H}^2(X,\phi_*\mathcal{C}) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"', "\Psi^2(X,\phi_*\mathcal{C})"] & \mathrm{H}^2(X,\mathcal{E}_1) \arrow[r] \arrow[d, "\Psi^2(X,\mathcal{E}_1)"] & 0 \\
{}'\mathrm{H}^1(X,\mathcal{E}) \arrow[r] & {}'\mathrm{H}^1(X,\phi_*\mathcal{C}) \arrow[r] & {}'\mathrm{H}^1(X,\mathcal{E}_1) \arrow[r] & {}'\mathrm{H}^2(X,\mathcal{E}) \arrow[r] & {}'\mathrm{H}^2(X,\phi_*\mathcal{C}) \arrow[r] & {}'\mathrm{H}^2(X,\mathcal{E}_1) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Lemme 4.2.3 (i) implique que le morphisme $\Psi^2(X,\mathcal{E})$ et ainsi $\Psi^2(X,\mathcal{E}_1)$ sont injectifs. Finalement, le lemme 4.2.3 (ii) nous donne la surjectivité de $\Psi^2(X,\mathcal{E})$. Par conséquent, $\Psi^2(X,\mathcal{E})$ est bien un isomorphisme. Ceci finit donc la preuve du théorème 4.1.

4.3 Un corollaire : théorème de finitude

Comme un corollaire de 4.1 et du théorème de finitude de cohomologie à support propre, on a le corollaire suivant. On donne ci-après aussi une preuve directe.

Corollaire 4.3.1 *Soit $\mathcal{E}$ un faisceau lisse de Λ-modules. Alors les groupes $\mathrm{H}^i(X, \mathcal{E})$ sont tous finis.*

Démonstration. Par le lemme 4.2, le résultat dans le cas où $\mathcal{E}$ est constant constructible a été déjà établi. Pour traiter le cas général, on utilise la construction donnée dans l'étape 5. Il existe alors une résolution $\mathcal{E} \to \mathfrak{C}^\bullet$ avec $\mathfrak{C}^\bullet$ un complexe de Λ-modules

$$\cdots \to 0 \to \phi_{0,*}\mathcal{C}_0 \to \phi_{1,*}\mathcal{C}_1 \to \cdots \to \phi_{i,*}\mathcal{C}_i \to \cdots$$

où $\phi_i : X_i \to X$ est un morphisme fini étale, et $\mathcal{C}_i$ est un faisceau constant constructible de Λ-modules. On obtient donc la suite spectrale suivante :

$$E_1^{i,j} = \mathrm{H}^j(X, \phi_{i,*}\mathcal{C}_i) \Longrightarrow \mathrm{H}^{i+j}(X, \mathcal{E}).$$

D'après 4.2.5, et le fait que ϕ_i sont des morphismes finis. Il en résulte que les groupes $E_1^{i,j}$ sont *fini*. Par conséquent, le groupe $E_\infty^{i,j}$ l'est aussi. D'ailleurs, comme $E_1^{i,j} = 0$ pour $i < 0$ ou $j < 0$, il en est de même de $E_\infty^{i,j}$. Par suite, $\mathrm{H}^{i+j}(X, \mathcal{E})$ admet d'une filtration de longueur finie (de longueur $i + j$), dont les quotients successifs sont finis. Ainsi, le groupe $\mathrm{H}^n(X, \mathcal{E})$ est également fini. D'où le résultat. □

Remarque 4.3.2 En effet, on a des théorèmes de finitude en cohomologie étale beaucoup plus général. Par exemple, Deligne a démontré dans [2] le fait suivant : soient X/k un schéma de type fini sur un corps k séparablement clos, $\mathcal{F}$ un faisceau constructible de Λ-module [9], alors les groupes de cohomologie $\mathrm{H}^i(X, \mathcal{F})$ sont *finis*. Plus récemment, Gabber a obtenu des théorèmes de finitude en cohomologie étale encore plus général. Par exemple, il a prouvé le résultat suivant : soient S un schéma nothérien *quasi-excellent*, $f : X \to S$ un morphisme de type fini, et $\mathcal{F}$ un faisceau constructible de Λ-modules, alors les images directe supérieures $\mathrm{R}^i f_* \mathcal{F}$ sont constructible.

5. Quelques remarques supplémentaires

5.1 Dualité de Poincaré en dimension 1

5.1.1 Pour prouver le théorème 3.1 pour une courbe lisse projective sur k, il nous faut d'abord traiter le cas où le faisceau constructible $\mathcal{F}$ est à support fini. Ceci résulte essentiellement du théorème de pureté relatif (en dimension 1) : soient Y un schéma nothérien régulier de dimension 1, $y \in Y$ un point fermé. Notons $i : \{y\} \hookrightarrow Y$ l'immersion fermée canonique. Alors on a

$$\mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}(i_*\Lambda_y, \Lambda_Y) = \mathrm{R}\underline{\Gamma}_{\{y\}}(Y, \Lambda_Y) \simeq i_*\Lambda_y(-1)[-2].$$

5.1.2 Une fois le cas avec des faisceaux à support fini a été établi, soit $\mathcal{F}$ un faisceau constructible de Λ-modules, il existe alors un ouvert $j : U \hookrightarrow X$ sur lequel $\mathcal{G}$ est localement constant. Posons $\mathcal{E} = j^*\mathcal{F}$. On a alors la suite exacte courte suivante :

$$0 \to j_!j^*\mathcal{F} \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to 0.$$

avec $\mathcal{G}$ un faisceau à support fini. Par suite, pour démontrer 3.1 pour le faisceau $\mathcal{F}$, il suffit de prouver le même résultat pour le faisceau $j_!j^*\mathcal{F} = j_!\mathcal{E}$ avec $\mathcal{E}$ localement constant constructible sur U. Autrement-dit, il suffit d'établir le corollaire 3.2 pour une courbe, qui a été déjà démontré dans §4.

5.2 Formalisme de dualité ([3] et [1] Exposé XVIII)

5.2.1 Soit $f : X \to S$ un morphisme séparé de type fini, avec S quasi-compact quasi-séparé. Supposons que la dimension des fibres de f soit bornée par $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Posons $\Lambda = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On dispose

9. Rappelons que $\Lambda = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec l'entier n inversible sur X.

alors le foncteur

$$\mathrm{R}f_! : \mathbb{D}^+(X, \Lambda) \to \mathbb{D}^+(S, \Lambda)$$

La condition sur la dimension des fibres implique que, pour $\mathcal{F}$ un faisceau de Λ-module, on a

$$\mathrm{R}^i f_! \mathcal{F} = 0 \qquad \text{pour } i > 2d.$$

Par conséquent, on peut définir

$$\mathrm{R}f_! : \mathbb{D}(X, \Lambda) \to \mathbb{D}(S, \Lambda).$$

Théorème 5.2.2 ([1] Exp. XVIII théorème 3.1.4) *Le foncteur*

$$\mathrm{R}f_! : \mathbb{D}(X, \Lambda) \to \mathbb{D}(S, \Lambda)$$

admet un adjoint à droite partiel

$$\mathrm{R}f^! : \mathbb{D}^+(S, \Lambda) \to \mathbb{D}^+(X, \Lambda) :$$

pour $K \in \mathrm{Ob}\ \mathbb{D}(X, \Lambda)$, *et* $L \in \mathrm{Ob}\ \mathbb{D}^+(S, \Lambda)$, *on a un isomorphisme fonctoriel*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{D}(S,\Lambda)}(\mathrm{R}f_! K, L) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{D}(X,\Lambda)}(K, \mathrm{R}f^! L)$$

5.2.3 Par conséquent, on peut considérer le morphisme composé suivant :

$$\mathrm{R}f_* \mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}(K, \mathrm{R}f^! L) \longrightarrow \mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{R}f_! K, \mathrm{R}f_! \mathrm{R}f^! L) \longrightarrow \mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{R}f_! K, L)$$

dont le premier morphisme est le morphisme canonique, et le deuxième est induit par le morphisme d'adjonction $\mathrm{R}f_! \mathrm{R}f^! L \to L$.

Proposition 5.2.4 (([1] exposé XVIII proposition 3.1.10) *Le morphisme composé ci-dessus est un* isomorphisme.

5.2.5 Soit maintenant $f : X \to S$ lisse séparé quasi-compact sur une base S quasi-compact quasi-separé, dont les fibres sont purement de dimension d. Notons $\Lambda = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec n inversible sur S. La version relative de la construction esquissée dans §2 nous donne un morphisme trace :

$$\mathrm{Tr}_f : \mathrm{R}^2 f_! f^* \Lambda(d) \to \Lambda$$

d'où un morphisme dans la catégorie dérivée, encore noté par Tr_f :

$$\mathrm{Tr}_f : \mathrm{R}f_! f^* \Lambda(d)[2d] \to \Lambda.$$

Par adjonction, on obtient le morphisme suivant :

$$t_f : \Lambda(d)[2d] = f^* \Lambda(d)[2d] \to \mathrm{R}f^! \Lambda$$

La dualité de Poincaré pour le morphisme f peut s'énoncer de la manière suivante :

Théorème 5.2.6 (([1] exposé XVIII théorème 3.2.5) *Le morphisme* t_f *est un isomorphisme.*

Références

1 M. Artin, A. Grothendieck et J. L. Verdier, *Théorie de topos et cohomologie étale des schémas*, Tome 3, SGA 4, LNM. **305**.

2 P. Deligne, *Cohomologie étale*, Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie SGA 4 1/2, Springer.

3 J. L. Verdier, *A duality theorem in the étale cohomology of schemes*, in Local fields

Jilong Tong jilong.tong@math.u-bordeaux1.fr