1. Intégration et primitive

Exercice 1.1 *(1) : Donner la définition de*

$$\int_a^b f(x)dx,$$

où f est une fonction continue sur un intervalle I et $a, b \in I$.

(2) : Considérer la fonction sur $[0,4]$ suivante :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & : \quad 0 \le x \le 1; \\ x & : \quad 1 < x \le 2; \\ -2x+6 & : \quad 2 < x \le 4 \end{cases}$$

Calculer l'intégrale

$$\int_0^4 f(x)dx$$

à partir de la définition précédente.

Exercice 1.2 *Calculer*

$$\int_1^4 \frac{1}{x\sqrt{x}}dx, \qquad \int_{-1}^1 |x|^3 dx, \qquad \int_1^2 \frac{x^3+1}{4x}dx$$

Exercice 1.3 *Déterminer l'ensemble des primitives des fonctions suivantes, en précisant l'intervalle maximal de définition.*

(1). $f : x \mapsto e^{3x+1}$

(2). $f : x \mapsto \frac{1}{x-2}$

(3). $f : x \mapsto \frac{x^3+1}{x}$

Exercice 1.4 *Donner le lien entre intégrale et primitive.*

Exercice 1.5 *(1). Notons* $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ *(où $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, avec $k \in \mathbf{Z}$). Calculer la dérivation de la fonction* $\tan x$.

(2) Calculer

$$\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 t}dt.$$

(3) Calculer en intégrant par partie

$$\int_0^{\pi/4} \frac{t}{\cos^2 t}dt.$$

Exercice 1.6 *(1). Calculer la dérivation de la fonction $f : x \mapsto x \cdot ln\, x$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$, et en déduire les primitives de la fonction* $\ln(x)$ *sur* $]0, +\infty[$.

(2). Calculer $\int_1^3 \ln(t)dt$

(3). Calculer $\int_{1/e}^e |\ln(t)|dt$ (ici, $e := \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2,71828\cdots$).

(4). Calculer $\int_1^3 t^2 \ln(t)dt$.

Exercice 1.7 *(1). Donner la formule d'intégration par partie.*

(2). Calculer

$$\int_0^1 xe^x dx, \qquad \int_0^1 x^2 e^x dx.$$

(3). Soit $n \geq 1$ un entier. Montrer que

$$\int_0^1 x^n e^x dx = e - n \cdot \int_0^1 x^{n-1} e^x dx.$$

Exercice 1.8 *En effectuant deux intégrations par partie, calculer*

$$\int_0^{\pi/2} e^x sin(2x) dx$$

Exercice 1.9 *(1). Donner la formule de changement de variables.*

(2). Calculer les intégrales suivantes, en utilisant la formule de changement de variables ci-dessus :

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx, \qquad \int_1^2 \frac{ln(x)}{x} dx.$$

(3). Calculer la deuxième integrale en utilisant la formule d'intégration par partie.

Exercice 1.10 *(1) Exprimer $\cos^2 x$ en fonction de $\cos 2x$, et calculer*

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos^2 x dx.$$

(2). Montrer que $\cos^4 x \cdot \sin^3 x$ peut s'exprimer sous la forme $\sin x \times P(\cos x)$ avec P un polynôme de degré 6, puis calculer

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos^4 x \cdot \sin^3 x dx.$$

Exercice 1.11 *(1) Déterminer deux réels a et b, tels que pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 5\}$, on ait*

$$\frac{1}{x^2 - 4x - 5} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-5}.$$

(2). Calculer

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2 - 4x - 5}$$

Exercice 1.12 *Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction*

$$f : x \mapsto \frac{x}{x^2 - x - 2}$$

définie sur l'intervalle $]2, +\infty[$.

Exercice 1.13 *(1). Donner l'intervalle maximal de définition de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x[1-(ln\ x)^2]}$.*

(2). Calculer les intégrales :

$$\int_2^3 \frac{x}{x^2 - 2} dx, \qquad \int_3^4 \frac{1}{x[1 - (ln\ x)^2]} dx.$$

Exercice 1.14 *Trouver l'ensemble des primitives des fonctions suivantes, en précisant l'intervalle maximal de définition :*

(1). $f : x \mapsto \frac{x}{x^2 - 2x - 3}$.

(2). $f : x \mapsto \frac{x^2}{x^2 - 2x - 3}$.

Jilong TONG jilong.tong@math.u-bordeaux1.fr
Université de Bordeaux 1