TD 2, Corrigé.

1: forme générale des équations différentielles linéaires du premier ordre à coeff. constant.

$$y' = a y + f(x) \qquad x \in I$$

où a = une constante réelle

$f(x)$: une fonction continue (sur I)

2: (1) equation homogène associée.

$$y' + 5y = 0 \qquad (H)$$

(2) $$S_H = \{ k e^{-5x} \ / \ k \in \mathbb{R} \}$$

(3). puisque $f(x) = 3$ est un polynôme de degré 0

d'après le tableau du cours, l'equation (E) admet une solution particulière de la forme suivante.

$$y_p(x) = Q(x)$$

avec $Q(x)$ est un polynôme de degré 0 (ici 0 = degré de $f(x)$)

donc. on peut supposer

$Q(x) = a$ avec a une constante à determiner.

donc $y_p'(x) = 0$

on en déduit que : la fonction $y_p = y_p(x) = a$ vérifie l'equation (E)

$\Leftrightarrow \quad 3 = y_p'(x) + 5y_p(x)$

$\Leftrightarrow \quad 3 = 5 \cdot a \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{3}{5}$

on obtient ainsi une solution particulière

$$y_p(x) = \frac{3}{5}$$

donc $$S_E = \{ y_p + y \mid y \in S_H \}$$
$$= \{ \frac{3}{5} + k e^{-5x} \mid k \in \mathbb{R} \}$$

(4). Il faut trouver la constant k_0 t.q

$$\frac{3}{5} + k_0 \cdot e^{-5 \cdot 0} = 0$$

i.e $$k_0 = -\frac{3}{5}$$

d'où la solution de l'équation avec condition initiale

$$y(x) = \frac{3}{5} - \frac{3}{5} e^{-5x} \qquad (\forall x \in \mathbb{R})$$

3.

i). ~~Etape 1~~ $$\begin{cases} y' + 3y = 4e^x \\ y(0) = -2 \end{cases}$$

- on résout d'abord l'équation suivante.

$$y' + 3y = 4e^x \qquad (E)$$

① on résout son équation homogène associée

$$y' + 3y = 0 \qquad (H)$$

donc $$S_H = \{ k e^{-3x} \mid k \in \mathbb{R} \}$$

② on cherche une solution de $(\overset{E}{\cancel{H}})$.

d'après le tableau, il existe une solution de la forme

$y_p(x) = a \cdot e^x$, avec a une constant à determiner.

or $y'(x) = a e^{x}$. donc

la fonction $x \longmapsto y(x) = a e^{x}$ est une solution de (E)

$\Leftrightarrow \quad 4e^{x} = y'(x) + 3y(x)$

$\Leftrightarrow \quad 4e^{x} = a e^{x} + 3a e^{x} = 4a \cdot e^{x}$

$\Leftrightarrow \quad 4a = 4$

$\Leftrightarrow \quad a = 1$

on obtient ainsi une solution particulière de (E) :

$$y(x) = e^{x}$$

donc, $S_E = \{ e^{x} + k e^{-3x} \ / \ k \in \mathbb{R} \}$

- Maintenant, on tient compte de la condition initiale :

c-a-d, il faut trouver la constante k_0 t.q

$$e^{0} + k_0 e^{-3 \cdot 0} = -2. \Rightarrow k_0 = -3$$

donc : la solution finale est

$$y(x) = e^{x} - 3e^{-3x} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

ii).

$$y' + 3y = x e^{-x} + 5 \qquad (E)$$

- on résout d'abord son équation homogène associée.

$$y' + 3y = 0 \qquad (H)$$

donc $S_H = \{ k e^{-3x} \ / \ k \in \mathbb{R} \}$

- on cherche une solution particulière de (E)

le tableau + ~~pr~~ principe de la superposition $\Rightarrow$

il existe une solution de la forme $y_p(x) = Q(x) e^{-x} + a$

avec $Q(x)$ (resp. a) un polynôme de degré 1 (resp. une constante) à determiner

puisque $Q(x)$ est de degré 1, on peut supposer $Q(x)$ s'écrit sous la forme suivante :

$$Q(x) = a_1 x + a_0$$

il faut donc determiner les trois constantes a_0, a_1, a

or
$$y_p'(x) = \left((a_1 x + a_0) e^{-x} + a \right)'$$
$$= (-a_1 x - a_0 + a_1) e^{-x}$$

on a

la fonction

$$x \longmapsto y_p(x) = (a_1 x + a_0) e^{-x} + a$$

est une solution de (E)

$$\Leftrightarrow \quad x e^{-x} + 5 = y_p'(x) + 3 y_p(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad x e^{-x} + 5 = (a_1 - a_0 - a_1 x) e^{-x} + (3a_1 x + 3a_0) e^{-x} + 3a$$
$$= (2a_1 x + 2a_0 + a_1) e^{-x} + 3a$$

En comparant les coefficients, il suffit de prendre les a, a_1, a_0 qui vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} 2a_1 = 1 \\ 2a_0 + a_1 = 0 \\ 3a = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = -\frac{1}{4} \\ a_1 = \frac{1}{2} \\ a = 5/3 \end{cases}$$

d'où une solution particulière

$$y_p(x) = \left(\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\right) e^{-x} + \tfrac{5}{3}$$

donc
$$S_E = \left\{ \left(\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\right) e^{-x} + \tfrac{5}{3} + k e^{-3x} \;/\; k \in \mathbb{R} \right\}$$

iii) $3y' + 2y = 2x^3 + 14 \quad (E)$

tableau + principe de la superposition

$\Rightarrow$ il existe une solution particulière sous la forme suivante

$$y_p(x) = Q(x)$$

avec $Q(x)$ un polynôme de degré 3 (3 = degré du polynôme $2x^3+14$)

Supposons $Q(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Il faut donc déterminer les coefficients $a_0\ a_1\ a_2\ a_3$.

or $y_p'(x) = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$

donc $3y_p'(x) + 2y_p(x) = 3(3a_3x^2 + 2a_2x + a_1) + 2(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0)$

$= 2a_3x^3 + (9a_3 + 2a_2)x^2 + (6a_2 + 2a_1)x + (3a_1 + 2a$

donc la fonction $x \longmapsto y_p(x) = Q(x)$ est une solution de (E)

$\Leftrightarrow \quad 3y_p'(x) + 2y_p(x) = 2x^3 + 14$

$\Leftrightarrow \quad 2a_3x^3 + (9a_3 + 2a_2)x^2 + (6a_2 + 2a_1)x + (3a_1 + 2a_0)$

$= 2x^3 + 14$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a_3 = 2 \\ 9a_3 + 2a_2 = 0 \\ 6a_2 + 2a_1 = 0 \\ 3a_1 + 2a_0 = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = -\frac{53}{4} \\ a_1 = \frac{27}{2} \\ a_2 = -\frac{9}{2} \\ a_3 = 1 \end{cases}$$

d'où $S_E = \left\{ x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{27}{2}x - \frac{53}{4} + k e^{-\frac{2}{3}x} \,/\, k \in \mathbb{R} \right\}$

iv). $y' - y = \sin x + \cos x \quad (E)$

- Son équation homogène associée :

$$y' - y = 0 \qquad (H)$$

$$\Rightarrow \quad S_H = \{ k e^{x} \ / \ k \in \mathbb{R} \}$$

- recherche d'une solution particulière :

le tableau + principe de la superposition

$\Rightarrow$ $\exists$ une solution de la forme

$$y(x) = A \cos x + B \sin x$$

avec A, B deux coefficients à déterminer.

or $y'(x) = -A \sin x + B \cos x$

$\Rightarrow$ $y'(x) - y(x) = -(A+B) \sin x + (B-A) \cos x$

donc la fonction $x \longmapsto y(x) = A \cos x + B \sin x$

est une solution

$\Leftrightarrow$ $y'(x) - y(x) = \sin x + \cos x$

$\Leftrightarrow$ $-(A+B) \sin x + (B-A) \cos x = \sin x + \cos x$

Alors, il suffit de prendre les A, B t.q.

$$\begin{cases} -(A+B) = 1 \\ B - A = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 0 \end{cases}$$

d'où une solution particulière de (E) :

$$y(x) = -\cos x$$

donc $S_E = \{ -\cos x + k e^{x} \ / \ k \in \mathbb{R} \}$

1.4 :

(1) Son équation homogène associée.

$$y' + y = 0 \qquad (H)$$

$$\Rightarrow \quad S_H = \{ k e^{-x} \mid k \in \mathbb{R} \}$$

(2) $$y'(x) = k'(x) e^{-x} - k(x) e^{-x}$$

donc $$y'(x) + y(x) = k'(x) e^{-x} - k(x) e^{-x} + k(x) e^{-x}$$

$$= k'(x) e^{-x}$$

par suite,

$y = y(x)$ est une solution de (E)

$$\Rightarrow \quad y'(x) + y(x) = (x^2-1) e^{x}$$

$$\Rightarrow \quad k'(x) e^{-x} = (x^2-1) e^{x}$$

$$\Rightarrow \quad k'(x) = (x^2-1) e^{2x}$$

donc, la fonction $k(x)$ vérifie l'équation suivante

$$k'(x) = (x^2-1) e^{2x} \qquad (E')$$

(3). or $$\int (x^2-1) e^{2x} dx = \int x^2 e^{2x} dx - \int e^{2x} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int x^2 (e^{2x})' dx - \frac{1}{2}\int e^{2x} (2x)' dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x} (x^2)' dx - \frac{1}{2} e^{2x} - C_1$$

$$= \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \int x e^{2x} dx - \frac{1}{2} e^{2x} - C_1$$

$$= \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \frac{1}{2}\int x (e^{2x})' dx - \frac{1}{2} e^{2x} - C_1$$

$$= \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \frac{1}{2} x e^{2x} + \frac{1}{2}\int e^{2x} dx - \frac{1}{2} e^{2x} - C_1$$

$$= \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \frac{1}{2} x e^{2x} + \frac{1}{4} e^{2x} + C_2 - \frac{1}{2} e^{2x} - C_1$$ constante

$$= \frac{1}{2} x^2 e^{2x} \ldots \frac{1}{2} x e^{2x} \ldots \frac{1}{4} e^{2x} \ldots$$ une C…

on peut prendre par exemple

$$K(x) = \frac{1}{2}x^2 e^{2x} - \frac{1}{2}x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x}, \text{ et } S_{E'} = \left\{ \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^{2x} + C \,/\, C \in \mathbb{R} \right\}$$

on obtient ainsi une solution particulière de (E)

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2 e^{x} - \frac{1}{2}x e^{x} - \frac{1}{4}e^{x} \qquad (y = K(x)\, e^{-x})$$

donc $S_E = \left\{ \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\right)e^{x} + k e^{-x} \,/\, k \in \mathbb{R} \right\}$

Q5

$$y' = 3y + e^{3x} \cdot \sin x \quad (E)$$

- l'équation homogène associée :

$$y' = 3y \qquad (H)$$

$$\Rightarrow S_H = \{ k e^{3x} \,/\, k \in \mathbb{R} \}$$

- ~~Trouver~~ trouver une solution particulière : (méthode de variation de la constante)

on cherche une solution de la forme

$$y(x) = K(x)\, e^{3x} \quad \text{avec } K(x) \text{ dérivable.}$$

alors

$$y'(x) = K'(x)\, e^{3x} + K(x)(e^{3x})'$$
$$= K'(x)\, e^{3x} + 3K(x)\, e^{3x}$$

donc $y'(x) - 3y(x) = K'(x)\, e^{3x}$

on obtient ainsi les assertions suivantes.

la fonction $y(x)$ est une solution de (E)

$$\Leftrightarrow y'(x) - 3y(x) = e^{3x} \cdot \sin x$$

$$\Leftrightarrow K'(x)\, e^{3x} = e^{3x} \sin x$$

$$\Leftrightarrow K'(x) = \sin x$$

on peut prendre donc $K(x) = -\cos x$ (i.e une primitive de la fonction $\sin x$)

d'où une solution particulière.

$$y(x) = -\cos x \, e^{3x}$$

d'où $$S_E = \left\{ -\cos x \cdot e^{3x} + k e^{3x} \ / \ k \in \mathbb{R} \right\}$$

remarque générale

considérons l'équation suivante

(E) $\quad y' = ay + f(x)$ avec - a constante réelle
- $f(x)$ fonction continue

si la fonction est de type $\sin \omega x \cdot e^{kx}$ $(\omega, k \in \mathbb{R}$, tq. $\omega \neq 0)$
ou $\cos \omega x \cdot e^{kx}$

il existe alors une solution particulière pour (E) sous la forme suivante

$$y(x) = \left[A \sin \omega x + B \cos \omega x \right] e^{kx}$$

avec A, B deux coefficients à determiner

B

6.

i). puisque la fonction $y(x)$ et $A(x)$ ~~est~~ sont dérivables, la fonction $x \longmapsto y(x)e^{-A(x)}$ l'est aussi.

or $\left(y(x)e^{-A(x)}\right)'$

$= y'(x)e^{-A(x)} + y(x)\cdot\left(e^{-A(x)}\right)'$

$= y'(x)e^{-A(x)} + y(x)\ e^{-A(x)}\cdot(-A(x))'$

$= y'(x)e^{-A(x)} + y(x)\cdot(-a(x))\ e^{-A(x)}$ (car $A(x)$ est une primitive de la fonction $x \mapsto a(x)$)

$= \left(y'(x) - a(x)y(x)\right)e^{-A(x)}$

$= 0$ (car $y(x)$ est une solution de (H))

donc la fonction $x \longmapsto y(x)e^{-A(x)}$ est une fonction constante, c-a-d, il existe une constante réelle C

t.q $y(x)e^{-A(x)} = C \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \quad y(x) = C\cdot e^{+A(x)}$

D'autre part, quelque soit C un réel, la fonction $x \longmapsto Ce^{A(x)}$ est bien une solution de (H)

Donc $S_H = \left\{ Ke^{A(x)} \ / K\in\mathbb{R}\right\}$

ii) $S_E = \left\{ y_p + y \ / y \in S_H \right\}$

7 :

1) $y' = x^2 y$ (H)

puisque $\frac{1}{3}x^3$ est une primitive de la fonction x^2

$\Rightarrow S_H = \{ k e^{\frac{1}{3}x^3} / k \in \mathbb{R} \}$

2) $y' = y \cdot \sin x$ (H)

puisque $-\cos x$ est une primitive de la fonction $\sin x$

$\Rightarrow S_H = \{ k e^{-\cos x} / k \in \mathbb{R} \}$

8 : (i) $y_p(x) = k(x) \cdot e^{-\cos x}$

$$\Rightarrow y_p'(x) = k'(x) e^{-\cos x} + k(x) e^{-\cos x}(-\cos x)'$$

$$= k'(x) e^{-\cos x} + k(x) \sin(x) e^{-\cos x}$$

donc $y_p'(x) - y_p(x) \cdot \sin x$

$$= k'(x) e^{-\cos x} + k(x) \sin(x) e^{-\cos x} - k(x) e^{-\cos x} \sin x.$$

$$= k'(x) e^{-\cos x}$$

donc : $y_p(x)$ est une solution particulière

$$\Leftrightarrow y_p'(x) - \sin x \cdot y_p(x) = \sin x$$

$$\Leftrightarrow k'(x) e^{-\cos x} = \sin x$$

$$\Leftrightarrow k'(x) = \sin x \, e^{+\cos x}$$

or $\int \sin x \, e^{+\cos x} dx = \int e^{+\cos x} (-\cos x)' dx$

$$= -e^{+\cos x} + C$$

on peut prendre par exemple

$$k(x) = -e^{+\cos x}$$

donc la fonction $x \longmapsto y_p(x) = -e^{+\cos x} \cdot e^{-\cos x}$ $\left(= k(x) \cdot e^{-\cos x} \right)$

$$= \cancel{e^{2\cos x}} \ 1$$

est une solution particulière de l'équation (E).

d'où $S_E = \left\{ -1 + k e^{-\cos x} \ / \ k \in \mathbb{R} \right\}$

ii) $$-1 + k e^{-\cos \frac{\pi}{2}} = 2$$

$$\Leftrightarrow \quad k = 3$$

donc la solution est

$$y(x) = -1 + 3 e^{-\cos x}$$

<u>Q9</u>.

i). puisque $y' = -\mu y$

$\Rightarrow \exists$ une constante C t.q

$$y(t) = C e^{-\mu t}$$

par définition, le temps de demi-vie vérifie la condition suivante

$$y(T) = \frac{1}{2} y(0)$$

i.e $C \cdot e^{-\mu T} = \frac{1}{2} C e^{-\mu \cdot 0}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $e^{-\mu T} = \frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow$ $\mu T = \ln 2$

ii) comme $\ln 2 \approx 0{,}69 \Rightarrow \mu \approx \frac{0.69}{5700} = 1.21 \times 10^{-4}$

iii) Supposons la date de l'éruption volcanique est t.

<u>donc</u> $y(2006) = 40\% \, y(t)$

<u>i.e</u> $C e^{-\mu \cdot 2006} = 40\% \, C \cdot e^{-\mu t}$

<u>donc</u> $e^{-\mu(2006-t)} = 0.4$

$\Rightarrow$ $t = +\frac{\ln 0.4}{\mu} + 2006 \approx -5567$

<u>donc</u> la date d'éruption ≈ -5567.

iv) Il suffit de regarder ~~l'égalité~~ la relation suivante.

$$y(2006) = 42\% \, y(t)$$

i.e $e^{-\mu(2006-t)} = 0.42$.

d'où $t = -5163$

<u>donc</u> la date d'éruption est ≈ -5163

To

1). $\frac{dT}{dt} = k\cdot(T - T_a)$, c-a-d, la fonction $t \longmapsto T(t)$ est une ~~f~~ solution de l'equation $y' = ky - kT_a$ ~~ca~~ (E)

ii) il faut résoudre l'equation suivante

$$y' = ky - kT_a \qquad (E)$$

~~Sol~~ $\Rightarrow S_E = \{T_a + Ce^{kt} \,/\, C \in \mathbb{R}\}$

donc la fonction $t \longmapsto T(t)$ appartient à S_E

$\Rightarrow \exists$ une constante C_0 t.q $T(t) = T_a + Ce^{kT}$

on tient compte maintenant de la condition initiale pour fixer la constante C_0

$$T(0) = T_a + Ce^{k\cdot 0} = T_0 \Rightarrow C = T_0 - T_a$$

d'où $$T(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{kt}$$

iii) maintenant, la fonction $t \longmapsto T(t)$ vérifie l'équation suivante.

$$y' = ky - kT_a(t)$$

C'est-à-dire: $$y' = ky - kT_m\sin(wt) \qquad (E)$$

donc pour la résoudre, on regard d'abord son équation homogène associée.

$$y' = ky \qquad (H)$$

$\Rightarrow$ ~~y~~ $S_H = \{ce^{kt} \,/\, \cancel{\beta}\; c \in \mathbb{R}\}$

Puis, une solution particulière y_p peut être trouvée à l'aide du ~~du~~ tableau du cours (ou à l'aide de la méthode de variation de constante)

En fait, on peut prendre

$$y_p(x) = \frac{k^2}{w^2+k^2}T_m\sin wt + \frac{kwT_m}{w^2+k^2}T_m\cos wt.$$

d'où $\quad S_E = \left\{ \dfrac{k^2}{w^2+k^2} T_m \sin wt + \dfrac{k w T_m}{w^2+k^2} T_m \cos wt + C e^{kt} \;/\; C \in \mathbb{R} \right\}$

d'où, il existe une constante C t.q

$$T(t) = \frac{k^2}{\omega^2+k^2} T_m \sin \omega t + \frac{k\omega T_m}{\omega^2+k^2} T_m \cos \omega t + C e^{kt}$$

#

avec C une constante à determiner avec une condition initiale.