3. Equations différentielles du second ordre

Exercice 3.1 *Pour chacune des équations différentielles suivantes, déterminer l'ensemble des solutions, puis, la solution qui vérifie les conditions initiales* $y(0) = 0$ *et* $y'(0) = 1$ *pour les équations 1,2,4 et 6.*

i) $y'' + 2y' - 3y = -t + 1$.

ii) $y'' + 2y' - 3y = e^{2t}$.

iii) $y'' + 2y' - 3y = -t + 1 + e^{2t} + \cos t$.

iv) $y'' - 6y' + 9y = 3 + e^{t}$.

v) $y'' - 3y' = 3 + t^2$.

vi) $y'' + y = t + \sin(2t)$.

Exercice 3.2 *On veut résoudre l'équation suivante :*

$$y'' + 5y' - 6y = e^{2x}(x^2 + 1) \qquad (E).$$

i) *Résoudre son équation homogène associée.*

ii) *Soit* $y_p = y_p(x)$ *une solution particulière de (E), qui s'écrit sous la forme* $y_p(x) = Q(x) \cdot e^{2x}$.

  (a) *Trouver une équation différentielle (E') vérifiée par la fonction* $x \mapsto Q(x)$.

  (b) *Résoudre l'équation (E').*

  (c) *En déduire une solution particulière de (E).*

iii) *Déterminer l'ensemble des solutions de (E), puis, la solution qui vérifie les conditions initiales* $y(0) = 0$ *et* $y'(0) = -1$.

Exercice 3.3 *Résoudre les équations suivante :*

i) $y'' + y' + y = x^2 e^x$;

ii) $y'' + 2y' - 3y = x \sin x$;

iii) $y'' + y = x e^x$;

iv) $y'' + y = x \cos x$;

v)

$$\begin{cases} y'' + y = x(\cos x + e^x) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

Exercice 3.4 (Chute) *Le principe fondamental de la dynamique de Newton dit que le centre d'inertie d'un corps de masse m subit une accélération* $\vec{a} = \frac{1}{m}\vec{F_e}$ *où* $\vec{F_e}$ *est la somme des forces extérieures exercées sur l'objet.*

On choisit un axe vertical repéré par le vecteur $\vec{\jmath}$ *orienté vers le haut et d'origine O d'altitude 0. Ainsi le champ de pesanteur* $\vec{g} = -g\vec{\jmath}$ *et la vecteur accélération* $\vec{a} = a(t)\vec{\jmath}$.

i) *Si* $z(t)$ *désigne l'altitude du centre d'inertie du corps à l'instant t, exprimer* $a(t)$ *en fonction de* $z(t)$.

ii) *En l'absence de frottement, la seule force extérieure est la force de pesanteur* $m\vec{g}$. *En déduire que la fonction z satisfait l'équation différentielle*

$$z'' = -g.$$

Puis la résoudre en supposant que la position initiale est $z(0) = h$ *et que le corps n'a pas de vitesse initiale.*

iii) *Avec frottements, on suppose que le corps est soumis à une force de frottements proportionnelle à la vitesse (hypothèse valable seulement pour une vitesse pas trop élevée). Vérifier que la fonction* z *vérifie alors l'équation différentielle*

$$z'' = -g - \frac{k}{m} z'$$

puis la résoudre.

iv) *Dans le cas précédent, calculer la limite lorsque* t *tend vers l'infini de* z'*, quelle interprétation pouvez-vous en donner ?*

Exercice 3.5 (Masse suspendue à un ressort) *On considère un corps ponctuel* M *de masse* m *suspendu à un ressort et plongé dans un milieu ayant une certaine viscosité (air, eau, huile, ...). On repère la position de* M *sur un axe vertical, repéré par un vecteur* $\vec{\jmath}$ *orienté vers le haut, et on prend pour origine la position d'équilibre de* M*. On note* $y(t)$ *la cote de* M *sur cet axe à l'instant* t *(soit* $\overrightarrow{OM} = y(t)\vec{\jmath}$*).*

i) *En l'absence de force d'excitation agissant sur* M *, trois forces interviennent pour déterminer le mouvement de* M*, la force d'inertie proportionnelle à* y'' *(coefficient la masse* m*), la force de viscosité proportionnelle à* y' *(coefficient de viscosité* $b \geq 0$*) et la force de rappel proportionnelle à* y *(coefficient de raideur du ressort* $c > 0$*). Alors* y *vérifie l'équation*

$$my'' + by' + cy = 0.$$

Résoudre cette équation en cas de

(a) *Viscosité nulle (*$b = 0$*).*

(b) *Viscosité faible (*b *petit tel que* $b^2 - 4mc < 0$*).*

(c) *Viscosité grande (*b *grand tel que* $b^2 - 4mc > 0$*).*

(d) *Dans chaque cas comment se comporte* $y(t)$ *lorsque* t *tend vers l'infini ? (Pour avoir une idée de l'allure de la courbe lorsque* $b^2 - 4mc < 0$ *on pourra utiliser, en l'ayant vérifié, que* $A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x) = C\sin(\omega x + \varphi)$ *avec* $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ *et* φ *tel que* $\cos\varphi = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$ *et* $\sin\varphi = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$*.)*

ii) *On suppose maintenant de plus que* M *est soumis à une force sinusoïdale de pulsation* λ*, soit*

$$my'' + by' + cy = k \sin \lambda t$$

où k *est une constante. Résoudre cette équation dans chacun des cas précédents.*

iii) *Supposons ici* $b > 0$*. Que peut-on dire maintenant sur* $y(t)$ *lorsque* t *tend vers l'infini ?*

N.B. Le corrigé de TD2 sera disponible dans ma page web suivante :
http://www.math.u-bordeaux1.fr/˜jtong/Enseignement.html

Jilong TONG jilong.tong@math.u-bordeaux1.fr
Université de Bordeaux 1