SVE 101. TD 4

4.1. avec répétition et avec ordre

(a) $\{(e_1,e_1),(e_1,e_2),(e_1,e_3),(e_1,e_4);(e_2,e_1),(e_2,e_2),(e_2,e_3),(e_2,e_4)$
$(e_3,e_1),(e_3,e_2),(e_3,e_3),(e_3,e_4);(e_4,e_1),(e_4,e_2),(e_4,e_3),(e_4,e_4)\}$

(b). ~~{(e~~ avec ordre mais sans répétition

$\{(e_1,e_2),(e_1,e_3),(e_1,e_4);(e_2,e_1),(e_2,e_3),(e_2,e_4)$
$(e_3,e_1),(e_3,e_2),(e_3,e_4);(e_4,e_1),(e_4,e_2),(e_4,e_3)\}$

(c) avec répétition mais sans ordre.

$\{[e_1,e_1],[e_1,e_2],[e_1,e_3],[e_1,e_4],[e_2,e_3],[e_2,e_4],[e_2,e_2]$
$[e_3,e_3],[e_3,e_4],[e_4,e_4]\}$

(d). sans ordre et sans répétition

$\{[e_1,e_2],[e_1,e_3],[e_1,e_4],[e_2,e_3],[e_2,e_4],[e_3,e_4]\}$

4.2. notons $\Omega_0 := \{32 \text{ cartes}\}$ l'ensemble des 32 cartes d'un paquet.

i). $\Omega = \{$combinaisons de 3 cartes pries parmi les 32 cartes$\}$

$\cancel{= \{(\omega_1,\omega_2,\omega_3)\in\Omega_0^3 / \omega_1}$

$= \{A \subset \Omega_0 / \# A = 3\}$

ii) $\Omega = \Omega_0^3 = \Omega_0\times\Omega_0\times\Omega_0$

$= \{(\omega_1,\omega_2,\omega_3) / \omega_1,\omega_2,\omega_3 \in \Omega_0\}$

iii). $\Omega = \{(p),(f,p),(f,f,p),\cdots(f,f,\cdots,f,p),\cdots(f,f,\cdots\cdots)\}$

$(\cong \mathbb{Z}_{\geq 1} \cup \{+\infty\})$.

4.3. i) $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$

ii) $A \cap B \cap \bar{C}$

iii) ~~E_3 = {seuls A, B sont réalisés} ∪ {seuls~~

$\bar{E_3}$ = { ~~tois~~ trois événements sont réalisés } $= A \cap B \cap C$

$\Rightarrow E_3 = \overline{A \cap B \cap C} = \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$

(En fait, E_3 = { deux événements au plus sont réalisés }

= { A n'est pas réalisé } ∪ { B n'est pas réalisé } ∪ { C n'est pas réalisé }

$= \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$)

iv). E_4 = { un événement au moins est réalisé }

= { A est réalisé } ∪ { B est réalisé } ∪ { C est réalisé }

$= A \cup B \cup C$

4.4. notons A = " un employé suive le cours d'anglais "

B = " ———— d'allemand "

C = " ———— d'espagnol "

alors on a $A \cap B$ = " un employé suive ~~le~~ anglais et allemand "

$A \cap C$ = " ———— anglais et espagnol "

$B \cap C$ = " ———— allemand et espagnol "

$A \cap B \cap C$ = " ———— les 3 cours "

donc $P(A) = \frac{49}{100} = 0{,}49$ $\quad P(B \cap C) = \frac{24}{100} = 0{,}24$

$P(B) = \frac{49}{100} = 0{,}49$ $\quad P(A \cap B) = \frac{29}{100} = 0{,}29$

$P(C) = \frac{44}{100} = 0{,}44$ $\quad P(A \cap C) = \frac{22}{100} = 0.22$

$P(A \cap B \cap C) = \frac{17}{100} = 0{,}17$

a) notons E_1 := un employé ne suive aucun cours

~~alors~~

Alors $E_1 = \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C} = \overline{(A \cup B \cup C)}$

donc $P(E_1) = 1 - P(A \cup B \cup C)$

$= 1 - [P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)]$

$= 1 - \frac{1}{100}(49 + 49 + 44 - 24 - 29 - 22 + 17)$

$= \frac{16}{100} = 0,16$

b) $E_2 =$ " un employé ne suive qu'un seul cours "

$$= \underbrace{(A \cap \bar{B} \cap \bar{C})}_{= D_1} \cup \underbrace{(\bar{A} \cap B \cap \bar{C})}_{= D_2} \cup \underbrace{(\bar{A} \cap \bar{B} \cap C)}_{= D_3}$$

on voit facilement que $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, $D_2 \cap D_3 = \emptyset$, $D_1 \cap D_2 = \emptyset$

donc $P(E_2) = P(D_1) + P(D_2) + P(D_3)$

or $P(D_1) = P(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = P(A \cap \overline{(B \cup C)}) = P(A) - P(A \cap (B \cup C))$

$= P(A) - P((A \cap B) \cup (A \cap C))$

$= P(A) - (P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C))$

$= \frac{1}{100}(49 - (29 + 22 - 17))$

$= \frac{15}{100} = 0,15$

$P(D_2) = P(\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) = P(B \cap \overline{(A \cup C)}) = P(B) - P(B \cap (A \cup C))$

$= P(B) - (P(B \cap A) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C))$

$= \frac{1}{100}(49 - (24 + 29 - 17))$

$= 0,13$

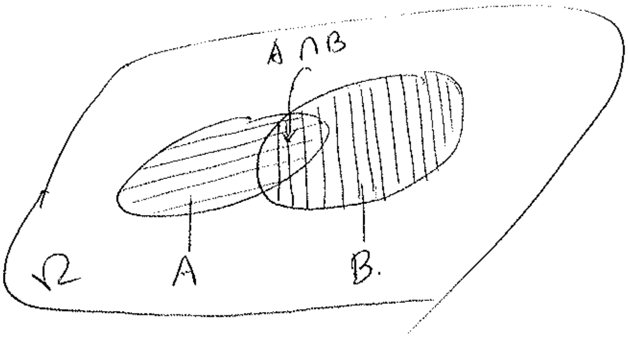
$P(D_3) = P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) = P(C) - (P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C))$

$= \frac{1}{100}(44 - (24 + 22 - 17))$

$= 0,15$

$\Rightarrow P(E_2) = P(D_1) + P(D_2) + P(D_3) = 0,43$

4.5



i) on a donc la décomposition suivante.

$$A \cup B = \underbrace{(A - A\cap B)}_{\overset{\shortparallel}{C_1}} \cup \underbrace{(B - (A \cap B))}_{\overset{\shortparallel}{C_2}} \cup \underbrace{(A \cap B)}_{\overset{\shortparallel}{C_3}}$$

alors $C_i \cap C_j = \phi \quad \forall i \neq j$

donc $p(A \cup B) = p(A - A\cap B) + p(B - A \cap B) + p(A \cap B)$

or pour A, on a

$$A = (A - A \cap B) \cup (A \cap B) \quad \text{(union disjointe)}$$

$$\Rightarrow p(A) = p(A - A\cap B) + p(A \cap B)$$

$$\Rightarrow p(A - A \cap B) = p(A) - p(A \cap B)$$

de m̂, on a $p(B - A\cap B) = p(B) - p(A \cap B)$

donc $p(A \cup B) = p(A - A\cap B) + p(B - A \cap B) + p(A \cap B)$

$$= p(A) - p(A \cap B) + p(B) - p(A \cap B) + p(A \cap B)$$

$$= p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Rem : ici, on peut aussi utiliser la décomposition

$$A \cup B = (A - A\cap B) \cup B$$

donc $p(A \cup B) = p(A - A \cap B) + p(B)$

$$= p(A) - p(A \cap B) + p(B)$$

$$= p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

ii). C'est un corollaire direct de i)

#

5

4.6 notons A l'événement : un ménage en équipés d'un ordinateur

B l'événement : un ménage en équipés d'un teléphone portable

donc $p(A) = 0{,}23$, $p(B) = 0{,}28$

$p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0{,}7$, en particulier, $p(A \cup B) = 1 - p(\overline{A \cup B}) = 0{,}3$.

ii) l'événement « un ménage ~~en~~ équipés d'un ordinateur et d'un teléphone portable »

$= A \cap B$

or $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

$\Rightarrow p(A \cap B) = -p(A \cup B) + (p(A) + p(B))$

$= -0.3 + (0.23 + 0.28) = 0{,}21$.

(iii). Si $p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0{,}73$

$\Rightarrow p(\bar{B}) \geq p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0{,}73$

donc $p(B) \leq 0.27$

or notre hypothèse $\Rightarrow p(B) = 0.28$, d'où une contradiction. ~~d'une une~~

donc ce n'est pas possible

#

4.7. Comme $A \cap B \subset A$

$\Rightarrow p(A \cap B) \leq p(A) = \frac{3}{4}$

D'autre part, comme $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

on en déduit $p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B) = \frac{3}{2} - p(A \cup B)$

or $p(A \cup B) \leq 1$

$\Rightarrow p(A \cap B) \geq \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$

d'où $\frac{1}{2} \leq p(A \cap B) \leq \frac{3}{4}$

#

4.8 notons $\Omega_0 = \{1,2,3,4,5,6\}$ ⑥

$\Omega := \Omega_0^2 = \{ (i,j) \ / \ 1 \le i,j \le 6 \}$

i : la face du dé bleu ; j : rouge

P est la probabilité uniforme, donc $P(\{(i,j)\}) = \frac{1}{\# \Omega} = \frac{1}{36}$

(i). ~~P (le dé bleu amène un nombre pair)~~

l'événement " le dé bleu amène un nombre pair "

$= \{ (i,j) \ / \ i = 2 \text{ ou } 4 \text{ ou } 6, \ 1 \le j \le 6 \} =: A$, et on voit que $\# A = 18 = 3 \times 6$

donc P (le dé bleu amène un nombre pair) $= P(A) = \frac{\# A}{\# \Omega} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

de la même manière, on obtient que

P (le dé rouge amène un nombre pair) $= \frac{1}{2}$

(ii). notons B l'événement " la somme des nombres obtenus soit paire "

alors $B = \{ (i,j) \ / \ i+j \text{ est pair} \}$

$= \{ (i,j) \in \Omega \ / \ i+j = 2 \} \cup \{ (i,j) \in \Omega \ / \ i+j = 4 \} \cup \{ (i,j) \in \Omega \ / \ i+j = 6 \}$

$\cup \{ (i,j) \in \Omega \ / \ i+j = 8 \} \cup \{ (i,j) \in \Omega \ / \ i+j = 10 \} \cup \{ (i,j) \in \Omega \ / \ i+j = 12 \}$

c'est une décomposition de B en union disjointe.

donc $P(B) = \sum_{k=1}^{6} P(\{ (i,j) \ / \ i+j = 2k \})$

$= \sum_{k=1}^{6} \frac{\# \{ (i,j) \ / \ i+j = 2k \}}{\# \Omega} = \frac{1}{2}$

or $\overline{B}$ = " la somme des nombres obtenus soit impaire "

donc P (la somme des nombres obtenus soit impaire)

$= 1 - P(B) = \frac{1}{2}$

Rem. Ici, on peut aussi utiliser la décomposition suivante.

$B = \{ (i,j) / i+j \text{ est pair} \} = \{ \{(1,j) / j \in \{1,3,5\}\} \cup \{(2,j) / j \in \{2,4,6\}\}$

$\cup \{(3,j) / j \in \{1,3,5\}\} \cup \{(4,j) / j \in \{2,4,6\}\}$

$\cup \{(6,j) / j \in \{2,4,6\}\} \cup \{(5,j) / j \in \{1,3,5\}\} \}$

avec cette décomposition, on voit facilement que

$\# B = 6 \times 3 = 18$, donc $P(B) = \frac{\# B}{\# \Omega} = \frac{1}{2}$

#

4.9. i). l'événement " au moins un des deux événements A ou B se réalise "

$= A \cup B$

donc P(au moins un des deux événements A ou B se réalise)

$= P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

car $A \perp\!\!\!\perp B$

$= P(A) + P(B) - P(A)P(B)$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$

ii). l'événement "un seul de ces événements se réalise"

$= (A-B) \cup (B-A)$ (rappelons que $A - B = A \cap \overline{B}$

donc P(un seul de ces événements se réalise)

$= P((A-B) \cup (B-A)) \overset{\text{car } (A-B) \cap (B-A) = \phi}{=} P(A-B) + P(B-A)$

or $A \perp\!\!\!\perp B \Rightarrow A \perp\!\!\!\perp \overline{B}$, $\overline{A} \perp\!\!\!\perp B$

donc $P(A-B) = P(A \cap \overline{B}) = P(A)P(\overline{B}) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{4}) = \frac{3}{8}$

$P(B-A) = P(B \cap \overline{A}) = P(B)P(\overline{A}) = \frac{1}{4}(1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{8}$

donc P(un seul de ces événements se réalise) $= \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

#

4.10

notons $\Omega_0 = \{1, 2, \dots, 6\}$

$\Omega = \Omega_0^2 = \{(i,j) \ / \ 1 \leq i, j \leq 6\}$

on considère l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{C}, P)$ avec P la proba. uniforme

alors $P(\{(i,j)\}) = \frac{1}{\# \Omega} = \frac{1}{36}$

(i). l'événement "obtenir 5 comme somme des chiffres"

$= \{(i,j) \ / \ i+j = 5\} = \{(1,4), (2,3)\ (3,2), (4,1)\} =: A$

donc P (obtenir 5 comme somme des chiffres) $= \frac{\# A}{\# \Omega} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

(ii) un calcul similaire que (i) $\Rightarrow P$ (obtenir 6 comme somme des chiffres) $= \frac{5}{36}$

maintenant, l'événement "obtenir au moins une fois la somme 6 pendant deux ~~lancés~~ jets"

= "obtenir la somme 6 au 1e jet" ou "obtenir la somme 6 au 2e jet"

notons A_1 = "obtenir la somme 6 au 1e jet"

A_2 = " ——————— 2e — "

on obtient donc

P(obtenir au moins une fois la somme 6 pendant deux jets")

$= P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$

$= \frac{5}{36} + \frac{5}{36} - P(A_1) \cdot P(A_2)$ ($A_1 \perp\!\!\!\perp A_2$ car les deux jets sont indépendants)

$= \frac{10}{36} - \frac{25}{36^2}$

$= \frac{\cancel{335}\ 335}{36^2}$

iii). notons $A =$ " la somme des chiffres est impaire "

$B =$ " l'un des chiffres au ~~en~~ moins vaut 1 "

Alors $A = \{(i,j) \,/\, i+j \text{ est impair}\}$

$\Rightarrow \# A = 18$

donc $p(A) = \#A / \#\Omega = \frac{1}{2}$

$B = \{(i,j) \,/\, i = 1 \text{ ou } j=1\}$

$= \{(1,j) / 1 \le j \le 6\} \cup \{(i,1) / 1 \le i \le 6\}$

donc $p(B) = p(\{(1,j) / 1 \le j \le 6\}) + p(\{(i,1) / 1 \le i \le 6\})$

$- p(\{(1,j)/1 \le j \le 6\} \cap \{(i,1) / 1 \le i \le 6\})$

$= \frac{6}{36} + \frac{6}{36} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}$

or $A \cap B = \{(i,j) \,/\, i+j \text{ est impair et } (i=1 \text{ ou } j=1)\}$

$= \{(1,2), (1,4), (1,6), (2,1), (4,1), (6,1)\}$

donc $p(A \cap B) = \frac{\# A \cap B}{\# \Omega} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

on a $p(A \cap B) = \frac{6}{36} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{11}{36} = p(A) \cdot p(B)$

donc A et B ne sont pas indépendants.

(iv). $p(\{(i,j) / i+j = 4\}) = \frac{\# \{(i,j) / i+j=4\}}{\# \Omega} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

(v). notons $A_i =$ " obtenir 4 comme la somme des chiffres au i-ème jet "

Alors $p(A_i) = p(\{(i,j) / i+j=4\}) = \frac{1}{12}$ (car les jets sont indépendant

or $\overline{\text{" il y a au moins une fois que la somme des chiffres soit égale à 4 "}}$

$= \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{20}}$

donc P (obtenir au moins une fois 4 comme la somme des chiffres)

$= 1 - p\left(\overline{\text{“ obtenir au moins une fois 4 comme la somme des chiffres ”}} \right)$

$= 1 - p(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{10}})$

$= 1 - \prod_{i=1}^{10} p(\overline{A_i}) = 1 - \prod_{i=1}^{10} (1 - p(A_i))$

$= 1 - \left(\frac{11}{12}\right)^{10} = \frac{12^{10} - 11^{10}}{12^{10}} = \cdots$

#

4.11. (i). ~~Le nombre d'arrangement de~~ $\frac{1}{n!}$

(ii) $\frac{1}{n}$

4.12. Notons $\Omega_0 = \{$ les 365 jours d'un an $\}$. (Il n'y a pas de 29 février !)

$\Omega = \Omega_0^{10} = \{ (a_1, a_2, \ldots, a_{30}) / a_i \in \Omega_0 \} \Rightarrow \# \Omega = (\# \Omega_0)^{30} = (365)^{30}$

alors. $\overline{\text{“ au-moins deux d'entre eux aient le même jour anniversaire ”}}$

$= \{ (a_1, a_2, \ldots, a_{30}) \in \Omega / \underset{\forall i \neq j}{a_i \neq a_j} \} =: A$

on vérifie que le cardinal de ce dernier ensemble est

$365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \cdots \cdot (365 - (30-1)) = \frac{365!}{(365-30)!}$

donc p(au moins deux d'entre eux aient le même jour anniversaire)

$= 1 - p(A) = 1 - \frac{\# A}{\# \Omega}$

$= 1 - \frac{365!}{335! (365)^{30}} \approx 0,71$

#.

4.13

a_1	a_2	a_3
a_4	a_5	a_6
a_7	a_8	a_9

(i) supposons les chiffres utilisés sont $1, 2, 3, \dots, 9$

notons Ω l'ensemble des codes possible

~~alor~~ alors, sous notre hypothèse

$$\Omega = \left\{ (w_1, w_2, \dots, w_9) \;/\; \begin{array}{l} w_i \in \{1, 2, \dots, 9\} \\ w_i \neq w_j \quad (\forall i \neq j) \end{array} \right\}$$

donc $\# \Omega$ = le nombre d'arrangements (sans répétitions) de 9 éléments.

$$= 9! = 362880$$

donc, la proba d'avoir le bon code d'accès

$$= \frac{1}{9!} = \frac{1}{362880}$$

(ii) comme les chiffres utilisés sont $1, 2, \dots, 6$

et on sait que les chiffres 1 et 2 sont répétés

$\Rightarrow$ les ~~cas~~ répétitions possibles ~~de ré~~ sont :

① deux "1" + trois "2"

② trois "1" + deux "2"

notons $\Omega_1 \subset \Omega$ le sous ensemble qui correspond à ①

$\Omega_2 \subset \Omega$ —— ②

alors $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ (union disjointe)

donc $\# \Omega = \# \Omega_1 + \# \Omega_2$.

or $\# \Omega_1 = \# \{$ positions possibles pour "1" $\} \cdot \# \{$ positions possibles pour "2" $\} \times$ le nombre d'arrangements sans répétition des chiffres ~~3, 4~~ 3, 4, 5, 6

$$= \binom{9}{2} \cdot \binom{9-2}{3} \cdot (9-2-3)!$$

$$= 36 \times 35 \times 4! = 30240$$

de m̂ $\# \Omega_2 = \binom{9}{3} \cdot \binom{9-3}{2} \cdot (9-3-2)! = \cancel{36 \times 35}\ 84 \times 15 \times 4!$
$= 30240$

$\Rightarrow \# \Omega = 60480$, et ~~B~~ la proba. de réussite $= \frac{1}{\# \Omega} = \frac{1}{60480}$

~~法~~ notons ~~A~~ N_1 = " obtenir une boule noire au 1° tirage "

B_1 = " ———— blanche — 1° —— "

N_2 = " obtenir une boule noire au 2^e^ tirage "

B_2 = " obtenir une boule blanche au 2^e^ tirage "

(i). " obtenir une boule blanche et une boule noire "

$= (N_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap N_2)$ (union disjointe)

donc $P($ "obtenir une boule blanche et une boule noire" $)$

$= P\big((N_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap N_2)\big) = P(N_1 \cap B_2) + P(B_1 \cap N_2)$

or $P(N_1 \cap B_2) = P(N_1) \cdot P(B_2)$ car les 2 tirage sont independants

et $P(N_1) = \dfrac{\text{nombre des boules noires}}{\text{nombre total des boules}} = \dfrac{10}{15} = \dfrac{2}{3}$

$P(B_2) = \dfrac{\text{nombre des boules blanches dans l'urne après le 1° tirage}}{\text{nombre total des boules dans l'urne après le 1° tirage}}$

$= \dfrac{5}{15} = \dfrac{1}{3}$

donc $P(N_1 \cap B_2) = \dfrac{2}{9}$, de m, $P(B_1 \cap N_2) = \dfrac{2}{9}$

donc $P($ obtenir une boule blanche et une boule noire $)$

$= \dfrac{4}{9}$

(ii) P(obtenir une boule blanche au 1° tirage et une boule noire au 2^e^ tirage)

$= P(B_1 \cap N_2) = \dfrac{2}{9}$

(iii) c'est encore $\dfrac{2}{9}$. en fait, une autre possible est "obtenir une boule noire au 1^e^ tirage, et une boule blanche au 2^e^ tirage" $= B_2 \cap N_1$

Avec remise

Alors ~~P (obtenir un~~

$$P(B_1 \cap N_2) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(N_2) = \frac{5}{15} \cdot \frac{10}{15-1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{5}{21}$$

$$P(N_1 \cap B_2) = P(N_1)\, P(\ \ ) = \frac{10}{15} \cdot \frac{5}{15-1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{14} = \frac{5}{21}$$

donc $P(\underbrace{\text{obtenir une boule noire et une boule blanche}}_{(B_1 \cap N_2) \cup (N_1 \cap B_2)}) = \frac{10}{21}$

$P(\underbrace{\text{obtenir une boule blanche au } 1^e \text{ tirage et une boule noire au } 2^e \text{ tirage}}_{B_1 \cap N_2}) = \frac{5}{21}$

$P(\underbrace{\text{obtenir une boule noire au } 1^e \text{ tirage et une boule blanche au } 2^e \text{ tirage}}_{N_1 \cap B_2}) = \frac{5}{21}$