5. Probabilités conditionnelles

Exercice 5.1 Une expérience est conduite pour étudier la mémoire des rats. Un rat est mis devant trois couloirs. Au bout de l'un d'eux se trouve la nourriture qu'il aime, au bout des deux autres, il reçoit une décharge électrique. Cette expérience élémentaire est répétée jusqu'à ce que le rat trouve le bon couloir. Sous chacune des hypothèses suivantes :

(H_1) le rat n'a aucun souvenir des expériences antérieures,
(H_2) le rat se souvient de l'expérience immédiatement précédente,
(H_3) le rat se souvient des deux expériences précédentes,

avec quelle probabilité la première tentative réussie est-elle la première ? la deuxième ? la troisième ? la k-ième ?

Exercice 5.2

i) Donner la formule de probabilités totales ;
ii) On considère une population composée de 48% d'hommes et de 52% de femmes. La probabilité qu'un homme soit daltonien est $0,05$; qu'une femme soit daltonienne est $0,0025$. Quelle proportion de la population est-elle daltonienne ?

Exercice 5.3 On lance deux dés ordinaires.

i) Quelle est la probabilité conditionnelle d'avoir obtenu un double sachant que la somme des points est égale à 8.
ii) Quelle est la probabilité conditinnelle d'avoir obtenu un double sachant que la somme des points est supérieure ou égale à 10.

Exercice 5.4

i) Donner la formule de Bayes ;
ii) On considère 3 urnes : U_1 contient 2 boules noires et 3 boules rouges ; U_2 contient une boule noire et 4 boules rouges ; U_3 contient 3 boules noires et 4 boules rouges. On tire une boule dans U_1 et une boule dans U_2, et on les met dans U_3. On tire une boule dans U_3, elle est noire. Quelle est la probabilité que la boule tirée de U_1 soit rouge ?

Exercice 5.5 (Loi de Hardy-Weinberg) Lorsqu'un gène porte deux allèles A et a, un individu peut avoir l'un des trois génotypes AA, Aa ou aa ; il transmet alors aléatoirement un des deux allèles à son enfant.

i) Calculer $P(AA)$, $P(Aa)$ et $P(aa)$ pour un enfant dont les deux parents ont pour génotypes respectifs
   (a) AA et AA ; (b) Aa et AA ; (c) aa et AA ; (d) Aa et Aa.
ii) On considère une population (génération 0) pour laquelle les proportions respectives des trois génotypes AA, Aa et aa sont p_0, q_0 et r_0. On admet que l'appariement est aléatoire.
   (a) Exprimer en fonction de p_0, q_0 et r_0 la probabilité p_1 qu'un enfant (i.e. la génération 1) de la génération 0 ait le génotypes AA.
   (b) Mêmes questions pour q_1 et r_1.
iii) Soit $\alpha = p_0 - r_0$, montrer que $p_1 = \left(\frac{\alpha+1}{2}\right)^2$, $q_1 = \frac{1-\alpha^2}{2}$ et $r_1 = \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2$.
iv) Calculer $p_1 - r_1$, que peut-on en déduire sur p_n, q_n et r_n pour $n \geq 1$?

Exercice 5.1. Notons A_i l'événement : le i-ième est réussi. Alors l'événement B_k :="la première tentative réussie est la k-ième" se traduit en termes des A_i par

$$\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k.$$

D'après la formule de cascades, on a

$$P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k) = P(\overline{A_1}) \cdot P_{\overline{A_1}}(\overline{A_2}) \cdots P_{\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_{k-2}}}(\overline{A_{k-1}}) \cdot P_{\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{k-1}}}(A_k),$$

sous l'hypothèse $P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{k-1}}) > 0$.

Sous l'hypothèse (H_1), on a

$$P_{\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{j-1}}}(\overline{A_j}) = P(\overline{A_j}) = 1 - P(A_j) = 2/3,$$

donc $P(B_k) = 2^{k-1}/3^k$.

Sous l'hypothèse (H_2), on a

$$P_{\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{j-1}}}(\overline{A_j}) = P_{\overline{A_{j-1}}}(\overline{A_j}) = 1 - P_{\overline{A_j}}(A_j) = 1/2,$$

donc

$$P(B_k) = P(\overline{A_1}) \cdot \frac{1}{2} \cdot \cdots \cdot \frac{1/2}{\cdot} \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{3 \cdot 2^{k-2}} \quad \text{si } \ k \geq 2,$$

et $P(B_1) = 1/3$.

Sous l'hypothèse (H_3), on a $P(B_1) = 1/3$, $P(B_2) = P(\overline{A_1}) P_{\overline{A_1}}(A_2) = 1/3$, et

$$P(B_3) = P(\overline{A_1}) P_{\overline{A_1}}(\overline{A_2}) P_{\overline{A_1} \cap \overline{A_2}}(A_3) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{3}.$$

Or sous l'hypothèse (H_3), le rat peut réussir à trouver le bon couloir dans 3 fois, donc $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \subset A_3$, d'où

$$B_k = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k = \emptyset,$$

dès $k \geq 4$. Par suite $P(B_k) = 0$ dès $k \geq 4$. □

Exercice 5.2. i) (**Formule de probabilités totales**) Soit $(\Omega, \mathcal{C}, P)$ un espace probabilisé,. Soit $(A_i)_{i=1}^n$ un système complet d'événement de Ω tel que $P(A_i) > 0$. Etant donné A un événement de Ω, alors on a

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P_{A_i}(A).$$

ii) Notons A l'événement : une personne est un homme, et B l'événement : une personne est daltonienne. Alors $\{A, \overline{A}\}$ forme un système complet de Ω (:= la population) tel que $P(A) = 0,48$ et que $P(\overline{A}) = 0,52$. Donc, en vertu de la formule de probabilités totales (rappelée ci-dessus), on a

$$P(B) = P(A) P_A(B) + P_{\overline{A}}(B) = 0,48 \cdot 0,05 + 0,52 \cdot 0,0025 = 0,0253.$$

□

Exercice 5.3. Notons $\Omega_0 = \{1, 2, \cdots, 6\}$, et $\Omega = \Omega_0^2 = \{(i,j) \in \mathbf{Z}^2 | 1 \leq i, j \leq 6\}$.

i) L'ensemble des résultats possibles sachant que la somme des points est égale à 8 est le suivant :

$$\{(2,6), (3,5)), (4,4), (5,3), (6,2)\}.$$

Dans cet ensemble, il y a un seul double $(4,4)$, donc la probabilité voulue est $1/5$.

ii) L'ensemble des résultats possibles sachant que la somme des points est ≥ 10 est le suivant :

$$\{(4,6),(5,5),(6,4),(5,6),(6,5),(6,6)\}.$$

Dans cet ensemble, il y a deux doubles : $(5,5)$ et $(6,6)$. Donc la probabilité voulue est $2/6 = 1/3$.

□

Exercice 5.4. i) (**Formule de Bayes**) Soient $(\Omega, \mathcal{C}, P)$ un espace probabilisé, et $(A_i)_{i=1}^n$ un système complet de Ω tel que $P(A_i) > 0$. Etant donné A un événement de Ω tel que $P(A) > 0$, on a

$$P_A(A_i) = \frac{P(A_i) \cdot P_{A_i}(A)}{\sum_{j=1}^n P(A_j) \cdot P_{A_j}(A)}$$

ii) On considère les événements suivants : A_1 :="on tire une boule noire dans U_1 et une boule noire dans U_2" ; A_2 :="on tire une boule noire dans U_1 et une boule rouge dans U_2" ; A_3 :="on tire une boule rouge dans U_1 et une boule noire dans U_2" ; A_4 :="on tire une boule rouge dans U_1 et une boule rouge dans U_2". Alors $\{A_i : 1 \leq i \leq 4\}$ est un système complet tel que $P(A_i) > 0$. Soit A l'événement "on tire une boule noire dans U_3", et on a aussi $P(A) > 0$. Pour utiliser la formule de Bayes, il faut calculer d'abord les probabilités $P(A_i)$, et $P_{A_i}(A)$: en fait, on a $P(A_1) = 2/25$, $P(A_2) = 8/25$, $P(A_3) = 3/25$, $P(A_4) = 12/25$; $P_{A_1}(A) = 5/9$, $P_{A_2}(A) = 4/9$, $P_{A_3}(A) = 4/9$, $P_{A_4}(A) = 3/9$. Donc, d'après la formule de Bayes, on a

$$P_A(A_3) = \frac{P(A_3) \cdot P_{A_3}(A)}{\sum_{j=1}^n P(A_j) \cdot P_{A_j}(A)} = \frac{2}{15},$$

et

$$P_A(A_4) = \frac{P(A_4) \cdot P_{A_4}(A)}{\sum_{j=1}^n P(A_j) \cdot P_{A_j}(A)} = \frac{2}{5}.$$

Donc la probabilité que la boule tirée de U_1 soit rouge (sachant que la boule tirée de U_3 est noire)$=P_A(A_3) + P_A(A_4) = \frac{8}{15}$.

□

Exercice 5.5.

i) Notons F_A (resp. M_A)l'événement "le père (resp. la mère) transmet l'allèle 'A' son enfant", et F_a (resp. M_a)l'événement "le père (resp. la mère) transmet l'allèle 'a' son enfant"
   (a) Les deux parents ont pour génotypes respectifs AA et AA : alors $P(AA) = 1$, $P(Aa) = 0$ et $P(aa) = 0$;
   (b) Les deux parents ont pour génotypes respectifs Aa et AA : alors $P(AA) = P(F_A \cap M_A) = P(F_A) \cdot P(M_A) = 1/2$, de même $P(Aa) = 1/2$, et $P(aa) = 0$;
   (c) Les deux parents ont pour génotypes respectifs aa et AA : alors $P(AA) = 0$, $P(Aa) = 1$, et $P(aa) = 0$;
   (d) Les deux parents ont pour génotypes respectifs Aa et Aa : alors $P(AA) = P(F_A \cap M_A) = 1/4$, $P(aa) = 1/4$, $P(Aa) = P(F_A \cap M_a) + P(F_a \cap M_A) = 1/4 + 1/4 = 1/2$.

ii) (a) Pour qu'un enfant de la génération 0 ait le génotypes AA, si l'on note F le génotypes du père et M le génotypes de la mère, il faut et il suffit que

$$(F, M) \in \{(AA, AA), (AA, Aa), (Aa, AA), (Aa, Aa)\}$$

Donc d'après la formule de probabilités totales, on a

$$p_1 = P(\mathcal{P}_1) = p_0^2 + \frac{1}{2}p_0q_0 + \frac{1}{2}q_0p_0 + \frac{1}{4}q_0^2 = \left(p_0 + \frac{1}{2}q_0\right)^2.$$

(b) De même, on a $q_1 = p_0q_0 + r_0q_0 + 2r_0p_0 + \frac{1}{2}q_0^2$, et $r_1 = \left(r_0 + \frac{1}{2}q_0\right)^2$

iii) Comme $1 = p_0 + q_0 + r_0$, donc

$$\frac{1+\alpha}{2} = \frac{p_0 + q_0 + r_0 + (p_0 - r_0)}{2} = p_0 + \frac{1}{2}q_0,$$

d'où $p_1 = \left(\frac{1+\alpha}{2}\right)^2$. De même, $r_1 = \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2$. Par ailleurs, comme

$$\frac{1-\alpha^2}{2} = \frac{(p_0+q_0+r_0)^2 - (p_0-r_0)^2}{2} = \frac{q_0^2 + 2p_0q_0 + 2p_0r_0 + 4q_0r_0}{2} = q_1,$$

d'où l'assertion.

iv) D'abord

$$p_1 - r_1 = \alpha = p_0 - r_0.$$

Pour généralement, posons $\alpha_n := p_n - r_n$, par le même raisonnement, on a $p_n - r_n = \alpha_{n-1} = p_{n-1} - q_{n-1} = \alpha$. Donc on a

$$p_n = \left(\frac{1+\alpha_{n-1}}{2}\right)^2 = \left(\frac{1+\alpha}{2}\right)^2.$$

De même, $q_n = \frac{1-\alpha^2}{2}$, et $r_n = \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2$ pour $n \geq 1$.

$\square$