Université de Bordeaux **Arithmétique – M1MA7W01**
Master 1 CSI Année 2013–2014

FEUILLE D'EXERCICES n° 4

Exercice 1 –

1) Soit K un corps fini de cardinal 32. Soit $x \in K^*$ tel que $x \neq 1$. Montrer que x est primitif dans K.

2) Soit L un corps fini de cardinal 27. Soit $x \in L^*$ tel que $x \notin \{1, -1\}$. Prouver que x ou $-x$ est primitif dans L.

Exercice 2 – Posons $K = \mathbb{F}_2[Y]/\left\langle Y^4 + Y^3 + Y^2 + Y + 1\right\rangle$ et notons α la classe de Y dans K.

1) Démontrer que K est un corps.

2) Calculer $(\alpha+1)^5$, puis montrer que $\alpha + 1$ est primitif dans K.

3) L'élément α est-il primitif dans K ?

Exercice 3 – On pose $A = \mathbb{F}_2[Y]/\left\langle Y^6 + Y + 1\right\rangle$ et on désigne par α la classe de Y dans A.

1) Calculer α^9, α^{21} et α^{63}.

2) Quel est l'ordre de α ? En déduire que A est un corps.

3) Quel est le polynôme minimal de α^{21} sur $\mathbb{F}_2$?

4) Trouver le degré de α^9 sur $\mathbb{F}_2$.

5) Quels sont les éléments de $\mathbb{F}_2(\alpha^9) \cap \mathbb{F}_2(\alpha^{21})$?

Exercice 4 –

1) Combien y a-t-il de polynômes unitaires irréductibles de degré 2 dans $\mathbb{F}_5[X]$?

2) Combien y a-t-il de polynômes unitaires primitifs de degré 2 dans $\mathbb{F}_5[X]$?

Exercice 5 – [EXTENSIONS D'ARTIN-SCHREIER]
Soient p un nombre premier et K un corps de caractéristique p. Soit $b \in K$; posons $Q = X^p - X - b$. On choisit une extension L de K contenant une racine α de Q.

1) Montrer l'égalité $Q = \prod_{k \in \mathbb{F}_p} (X - \alpha - k)$ dans $L[X]$. [*On pourra d'abord calculer $Q(\alpha + k)$ pour tout $k \in \mathbb{F}_p$*]

2) Soit $P = X^d - a_1 X^{d-1} + \cdots + (-1)^d a_d$ un facteur unitaire de Q dans $L[X]$. Montrer que $a_1 - d\alpha \in \mathbb{F}_p$, puis que $a_1^p - a_1 = db$.

3) Prouver que Q est irréductible dans $K[X]$ si et seulement si Q n'a pas de racine dans K.

4) Soit $c \in \mathbb{F}_p^*$. Montrer que le polynôme $X^p - X - c$ est irréductible dans $\mathbb{F}_p[X]$.

Exercice 6 –

1) Calculer le produit des polynômes irréductibles de degré 4 dans $\mathbb{F}_2[X]$.

2) Combien y a-t-il de polynômes irréductibles de degré 6 dans $\mathbb{F}_2[X]$?

3) Combien y a-t-il de polynômes primitifs de degré 6 dans $\mathbb{F}_2[X]$?

Exercice 7 –

1) On choisit un corps K de cardinal 64. Montrer que le polynôme $X^{21} - 1$ est scindé dans $K[X]$.

2) Déterminer la liste des degrés des facteurs irréductibles de $X^{21} - 1$ dans $\mathbb{F}_2[X]$.