UPS – Centre d'Orsay | **Arithmétique – Maîtrise**
Mathématiques | Année 2002–2003

Examen (24/06/2003). Durée : 4 heures.

Les 3 parties du problème sont indépendantes, modulo l'usage explicitement indiqué dans le texte de résultats antérieurs, et le préliminaire.

Dans tout le problème, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{\varepsilon q})$, où q est un nombre premier impair et $\varepsilon = \pm 1$, tels que $\varepsilon q \equiv 1 \pmod 4$. [*A partir du II.3, on aura* $\varepsilon = -1$].

On note $\mathcal{O}$ l'anneau des entiers de K ; si $\mathfrak{A} \subset \mathcal{O}$ est un idéal, on note $N\mathfrak{A} := |\mathcal{O}/\mathfrak{A}|$. Soit χ le caractère de Legendre de $(\mathbb{F}_q)^*$, qui définit de la façon usuelle une fonction de période q de $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$, toujours notée χ par abus de langage.

Partie I

Soit p un nombre premier arbitraire et $p\mathcal{O}$ l'idéal principal de $\mathcal{O}$ associé. On dit que p est *décomposé* si $p\mathcal{O} = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{p}_1 \neq \mathfrak{p}_2$, *inerte* si $pO = \mathfrak{p}$ et *ramifié* si $p\mathcal{O} = \mathfrak{p}^2$, où $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ désignent des idéaux premiers de $\mathcal{O}$.

1) Montrer que, pour tout p premier, ces trois cas sont les seuls possibles.

2) [*Pour les trois questions suivantes, on pourra utiliser le critère de Kummer*]. On suppose que $(p, 2q) = 1$. Montrer qu'il y a alors deux possibilités :

- p décomposé $\Leftrightarrow$ εq est un carré mod p $\Leftrightarrow$ $\left(\frac{p}{q}\right) = \chi(p) = 1$.
- p inerte $\Leftrightarrow$ εq n'est pas un carré mod p $\Leftrightarrow$ $\chi(p) = -1$.

3) Montrer que q est ramifié.

4) Montrer que $p = 2$ n'est pas ramifié. Dans quel cas est-il décomposé ou inerte ?

5) On considère les produits eulériens

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}, \qquad L(s, \chi) = \prod_p \frac{1}{1 - \chi(p)p^{-s}},$$

$$Z(s) = \prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1 - (N\mathfrak{p})^{-s}} = \prod_p Z_p(s),$$

où $Z_p(s) := \prod_{\mathfrak{p}|p} \frac{1}{1-(N\mathfrak{p})^{-s}}$, et $\mathfrak{p}$ parcourt les idéaux maximaux de $\mathcal{O}$.

a) Montrer que $Z_p(s) = \zeta_p(s)L_p(s, \chi)$ pour tout p, les fonctions Z_p, ζ_p, L_p étant les facteurs en p de Z, ζ et L.

b) En déduire que le produit définissant $Z(s)$ est absolument convergent pour $\mathrm{Re}(s) > 1$, puis qu'il est égal à

$$Z(s) = \sum_{\mathfrak{A}} (N\mathfrak{A})^{-s} \qquad (\mathrm{Re}(s) > 1),$$

la série étant absolument convergente. [*La somme porte sur les idéaux entiers non-nuls de* $\mathcal{O}$]

Partie II

On rappelle que la série
$$L(1,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n}$$
est convergente. On pose $\zeta := e^{2i\pi/q}$ ainsi que les sommes de Gauss
$$g_\chi := \sum_{x=1}^{q-1}\chi(x)\zeta^x, \qquad g_\chi(n) := \sum_{x=1}^{q-1}\chi(x)\zeta^{nx}$$
1) Montrer à l'aide du lemme d'Abel que la série
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\zeta^{nx} \qquad (x\in\mathbb{Z})$$
est convergente si $q\nmid x$, puis à l'aide de la relation entre g_χ et $g_\chi(n)$ que
$$L(1,\chi)=\frac{1}{g_\chi}\sum_{x=1}^{q-1}\chi(x)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\zeta^{nx}.$$
2) On considère le développement en série de la détermination principale du logarithme
$$-\mathrm{Log}(1-z)=\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n}z^n, \qquad (|z|<1).$$
On *admettra* – c'est un théorème d'Abel – que cette identité reste vraie pour $z=\zeta^x$, $q\nmid x$. Si K est réel (soit $\varepsilon=1$ et $q\equiv 1 \pmod 4$), montrer que
$$L(1,\chi)=-\frac{1}{2}q^{-1/2}\sum_{x=1}^{q-1}\chi(x)\mathrm{Log}\left(1-\cos(2\pi x/q)\right).$$
Dans tout le reste du problème, on suppose que K est *imaginaire*, donc $\varepsilon=-1$ et $q\equiv 3 \pmod 4$.

3) Si $z=e^{i\theta}$, $0<\theta<2\pi$, il est élémentaire (et on admettra) que $\arg(1-z)=\frac{1}{2}(\theta-\pi)$. Montrer que
$$L(1,\chi)=-\pi q^{-3/2}\sum_{x=1}^{q-1}x\chi(x)$$
4) On rappelle que $q\equiv 3 \pmod 4$. Montrer que $\sum_{x=1}^{q-1}x$ est impair et en déduire que $L(1,\chi)\neq 0$.

Partie III

Soit $\Lambda=\mathbb{Z}v_1\oplus\mathbb{Z}v_2$ un réseau de $\mathbb{R}^2$, $Q=\{t_1v_1+t_2v_2 : 0\leqslant t_i<1\}$ un domaine fondamental, et $\|\ \|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$. On note $B(r)$ la boule fermée $\{x : \|x\|\leqslant r\}$. Soit $n(r) := \#\{\lambda\in\Lambda : \|\lambda\|\leqslant r\}$, $\rho := \sup_{x\in\overline{Q}}\|x\|$, et V le volume de Q pour la mesure de Lebesgue.

1) Montrer à l'aide de l'argument de Minkowski que
$$n(r) \leqslant \frac{\operatorname{vol} B(r+\rho)}{V}$$
2) En écrivant $B(r) \subset \sqcup_\lambda (\lambda + Q)$, où $\lambda \in \Lambda$ figure dans la réunion disjointe si et seulement si $(\lambda + Q) \cap B(r) \neq \emptyset$, montrer de même que pour r assez grand, on a
$$\operatorname{vol} B(r) \leqslant V n(r) + \operatorname{vol} B(r+2\rho) - \operatorname{vol} B(r-2\rho)$$
et en déduire que $n(r) = \frac{\pi}{V} r^2 + O(r)$ pour $r \to +\infty$.
3) On considère
$$\Lambda := \mathcal{O} = \left\{ \frac{1}{2}(m + n\sqrt{-q}) : m, n \in \mathbb{Z}, m \equiv n \pmod 2 \right\} \subset \mathbb{C}.$$
En déduire que
$$n(r) = \#\left\{ z \in \mathcal{O} : N_{K/\mathbb{Q}}(z) \leqslant r^2 \right\} = \left(\frac{2\pi}{\sqrt{q}} \right) r^2 + O(r)$$
★ **4)** En appliquant la sommation d'Abel à des fonctions bien choisies, montrer que la somme suivante converge pour $\mathrm{Re}(s) > 1$, et admet au voisinage de 1 l'équivalent
$$\sum_{z \in \mathcal{O}, z \neq 0} \left(N_{K/\mathbb{Q}}(z) \right)^{-s} \sim \left(\frac{2\pi}{\sqrt{q}} \right) \frac{1}{s-1}, \qquad (s > 1, s \to 1^+)$$
5) On utilise les fonctions introduites au I.5. Posons :
$$Z_1(s) := \sum_{\mathfrak{A} \text{ principal}} (N\mathfrak{A})^{-s}, \qquad (\mathrm{Re}(s) > 1).$$
a) Montrer que
$$Z_1(s) \sim \left(\frac{2\pi}{w\sqrt{q}} \right) \frac{1}{s-1} \qquad (s \to 1^+),$$
w étant le nombre de racines de l'unité de K.

★ b) Soit C une classe d'idéaux de K et $Z_C := \sum_{\mathfrak{A} \in C} (N\mathfrak{A})^{-s}$, la somme portant sur les idéaux entiers de C. Montrer que Z_C a en 1 le même équivalent que $Z_1(s)$.

c) En déduire que
$$Z(s) \sim \left(\frac{2\pi}{w\sqrt{q}} \right) \frac{h}{s-1},$$
où h est le nombre de classes d'idéaux.
6) A l'aide de I.5, II.3, et de cette dernière question, montrer que
$$h = -\frac{w}{2q} \sum_{x=1}^{q-1} \chi(x) x$$
Cette formule a-t-elle un intérêt calculatoire ?