UPS – Centre d'Orsay **Arithmétique – Maîtrise**
Mathématiques Année 2002–2003

Partiel 04/2003

Exercice 1 – On fixe un nombre premier p. Soient k et n deux entiers positifs. Leurs écritures en base p sont données respectivement par

$$n = \sum_{i \geqslant 0} n_i p^i, \quad k = \sum_{i \geqslant 0} k_i p^i,$$

où tous les chiffres n_i, k_i sont dans $[0, p-1]$.

1) Contempler $(1+x)^n$ et montrer que

$$C_n^k \equiv \prod_{i \geqslant 0} C_{n_i}^{k_i} \pmod{p}.$$

2) En considérant le cas $p = 2$, en déduire que le nombre de coefficients impairs dans une ligne du triangle de Pascal $(C_n^0, C_n^1, \ldots, C_n^n)$ est une puissance de 2, plus précisément $2^{\sum_{i \geqslant 0} n_i}$.

3) On note $(n!)_p$ le produit des entiers inférieurs à n, non divisibles par p. Montrer que

$$(-1)^{\lfloor n/p \rfloor}(n!)_p \equiv n_0! \pmod{p}.$$

[*Utiliser plusieurs fois le théorème de Wilson*]

Problème II

On se propose d'étudier le nombre de points sur un corps fini k de caractéristique $p \neq 2$ de la courbe affine d'équation

$$(E_{\mathrm{aff}}) \quad y^2 + x^3 + x = 0$$

On note $q = |k|$. On note $X_n = X_n(k^*)$ le groupe des caractères χ de k^* tels que $\chi^n = \varepsilon$; on note λ le caractère de Legendre de k^*.

1) Montrer que pour tout $\alpha \in k$, on a

$$\sum_{T^2 = \alpha} \lambda(T) = \sum_{\chi \in X_4'} \chi(\alpha),$$

où $X_4' \subset X_4$ est le sous-ensemble formé des caractères d'ordre *exact* 4 (la somme est nulle si $X_4' = \emptyset$). [*On pourra d'abord supposer que* $q \equiv 1 \pmod 4$ *et vérifier qu'alors* (-1) *est un carré dans* k.]

2) On suppose que $k = \mathbb{F}_{p^2}$ avec $p \equiv 3 \pmod 4$. Soit $\chi \in X_4'(k)$, on considère la somme de Jacobi homogène

$$J_0(\chi, \chi, \lambda) = \sum_{\substack{a+b+c=0 \\ a,b,c \in k}} \chi(a)\chi(b)\lambda(c)$$

Montrer que $J_0(\chi, \chi, \lambda) = J_0(\overline{\chi}, \overline{\chi}, \lambda)$. [*Utiliser l'automorphisme de Frobenius.*]

3) Écrire l'équation de la courbe projective $\mathcal{C}$ associée à (E_{aff}).

4) Soit N le nombre de points de la « surface » $S(k)$ d'équation $X^3+XT^2+Y^2T = 0$ dans k^3. Montrer que

a) le nombre de points de $S(k) \cap (X, Y, T : T = 0)$ est égal à q.

b) le nombre de points de $S(k) \cap (X, Y, T : T \neq 0)$ est égal à

$$-q + \sum_{a+b+c=0} \sum_{\substack{X,T \\ X^3=a \\ XT^2=b}} \varepsilon(T) + \lambda(c)\lambda(T).$$

On a donc $N = \sum_{a,b,c,X,T} \varepsilon(T) + \lambda(c)\lambda(T)$, où (a, b, c, X, T) parcourt k^5, avec les relations $X^3 = a$, $XT^2 = b$, $a + b + c = 0$.

5) On considère $N_1 = \sum_{a,b,c,X,T} \lambda(c)\lambda(T)$. Montrer que

$$N_1 = \sum_{a+b+c=0} \sum_{\eta \in X_3} \sum_{\chi \in X_4'} (\chi\eta)(a)\chi(b)\lambda(c).$$

En déduire à l'aide des propriétés connues des sommes de Jacobi que

$$N_1 = \sum_{\chi \in X_4'} J_0(\chi, \chi, \lambda).$$

6) Soit

$$N_0 := \sum_{a+b+c=0} \sum_{\substack{X^3=a \\ XT^2=b}} 1.$$

Montrer que $N_0 = q^2$.

7) On suppose $p \geqslant 5$. Montrer que $\mathcal{C}$ est lisse. Pour $p \equiv 1 \pmod 4$, calculer $\#\mathcal{C}(\mathbb{F}_{p^\alpha})$ pour $\alpha \geqslant 1$, et montrer que ce résultat est conforme au théorème de Weil.

8) On suppose que $p \equiv 3 \pmod 4$. Si $\chi \neq \varepsilon$ est un caractère de $\mathbb{F}_{p^2}^*$, on *admettra* que les sommes de Gauss relatives à χ et $\chi \circ N_\alpha$ où $N_\alpha : \mathbb{F}_{p^{2\alpha}} \to \mathbb{F}_{p^2}$ est la norme, vérifient la relation de Hasse-Davenport :

$$-g(\chi \circ N_\alpha) = (-g(\chi))^\alpha.$$

Montrer alors qu'il existe un nombre algébrique λ_1 de module $\sqrt{p}$, tel que

$$\#\mathcal{C}(\mathbb{F}_{p^\alpha}) = p^\alpha + 1 - \lambda_1^\alpha(1 + (-1)^\alpha).$$

[*Utiliser la question* 2]

9) Montrer que le nombre de points de (E_{aff}) sur $\mathbb{F}_p$ est $\sum_{x \in \mathbb{F}_p} (\varepsilon + \lambda)(x^3 + x)$. Pour $p \to \infty$, en déduire que

$$\#\left\{x \in \mathbb{F}_p : x^3 + x \text{ est un carré de } \mathbb{F}_p\right\} \sim \frac{1}{2}\#\mathbb{F}_p,$$

et estimer le terme d'erreur.