Devoir n° 2

À rendre pour la semaine du 06 novembre.

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $27(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0$. (4 pts)

Exercice 2.

a. Dans toute cette partie, a et b sont deux entiers naturels non nuls et premiers entre eux. Pour tout entier relatif c fixé, on considère l'équation

$$ax + by = c \ , \quad (x, y) \in \mathbb{Z}^2 \tag{1}$$

(i) Montrer que quel que soit l'entier c, l'équation (1) admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$. (2 pts)

(ii) Montrer que si le couple (x, y) est solution de (1), alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$, le couple $(x + kb, y - ka)$ est également solution. En déduire que pour tout entier c, l'équation (1) admet une solution $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ avec $0 \leqslant y \leqslant a - 1$. (2 pts)

(iii) En déduire que si $c > ab - a - b$, il existe (au moins) un couple (x, y) d'entiers *positifs ou nuls* solution de l'équation (1). (2 pts)

b. *Application :* à compter du 1er avril 2007, la Banque Centrale Européenne décide de ne plus émettre que des billets de 7 € et 11 €.

(i) Montrer qu'il est possible de payer n'importe quelle somme entière (on fait l'hypothèse que dans toute transaction, les deux parties ont accès à une quantité illimitée de billets de chacun des deux types). (1 pt)

(ii) On suppose maintenant que vous devez payer une somme S, mais que votre créancier ne peut pas rendre la monnaie. Ainsi, il est possible de payer si $S = 7$, mais pas si $S = 6$ ou 8 par exemple. Montrer qu'il est néanmoins toujours possible de payer si S est assez grande. Quelle est la plus grande somme S qu'il soit impossible de payer ? (2 pts)

Exercice 3. Soit (x_n) une suite décroissante de réels positifs qui converge vers 0. Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x_k$.

a. Montrer que la suite $A_n = x_0 - x_1 + \cdots - x_{2n-1} + x_{2n}$ est décroissante et que $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \geqslant 0$. (2 pts)

b. Montrer que la suite $B_n = x_0 - x_1 + \cdots + x_{2n} - x_{2n+1}$ est croissante et que $\forall n \in \mathbb{N}, B_n \leqslant x_0$. (2 pts)

c. En déduire que (A_n) et (B_n) convergent. Montrer que $\lim A_n = \lim B_n$, et conclure que (S_n) converge. (2 pts)

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ x \text{ si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

a. Montrer que f est continue en 0. (2 pts)

b. Monter que si $x_0 \neq 0$, f n'est pas continue en x_0. (2 pts)