Devoir Surveillé de Mathématiques n° 2

Durée 1h20. Documents interdits

Le 18 novembre 2006 (10h30 – 11h50)

Barême indicatif : $4+4+4+4+4$

Exercice 1.

a. Donner dans $\mathbb{R}$ les complémentaires des intervalles :

$$[0,1[\,, \qquad]1,+\infty[\qquad \text{et} \qquad]-\infty,+\infty[\,.$$

b. Donner pour chacun des intervalles ci-dessus un exemple de plus petit élément, de borne inférieure et de minorant s'ils existent en justifiant vos réponses.

Exercice 2. Calculer dans $\mathbb{C}$ les racines quatrièmes de $z = 2\sqrt{3} + 2i$ et les porter sur un graphique.

Exercice 3. Etudier la convergence des suites numériques (u_n), (v_n), $(u_n + v_n)$, $(u_n v_n)$ et (u_n/v_n) dans chacun des cas suivants :

a. $u_n = 1 + 1/n, \quad v_n = -1/n.$

b. $u_n = n, \quad v_n = (-1)^n/n.$

Exercice 4. Etudier les limites suivantes :

a. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \; -\frac{3x^3+2x^2+1}{(x^2+1)(x+1)}$

b. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \; \frac{1+x^2}{x^3-x^4}$

c. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \; \sqrt{x^2+3x+1}+x$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \; \sqrt{x^2+3x+1}+x$

Exercice 5.

a. Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$, expliciter avec des quantificateurs le fait que f soit continue en un point x_0 de $\mathbb{R}$.

b. Soit g une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$, expliciter avec des quantificateurs le fait que g soit continue en un point $y_0 = f(x_0)$ de $\mathbb{R}$.

c. En déduire que la fonction $g \circ f$ est continue au point x_0 de $\mathbb{R}$.