Devoir n° 3

À rendre pour le premier TD de la semaine du 3 novembre.
Notez lisiblement la lettre de votre section suivie de votre numéro de groupe dans le coin supérieur droit de votre copie.

Exercice 1. Si f et g sont deux fonctions réelles définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, on définit la fonction $f.g$ par $f.g : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)g(x)$.
Pour chacune des assertions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Si elle est vraie, la prouver, sinon écrire et démontrer sa négation.

1. $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad x < 2 \Rightarrow x^2 < 4.$
2. $\forall\, f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad (f,\, g$ croissantes$) \Rightarrow (f.g$ croissante$).$
3. $\forall\, f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad (f,\, g$ croissantes et f positive $) \Rightarrow f.g$ croissante.
4. $\forall\, f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad (f,\, g$ croissantes et positives $) \Rightarrow f.g$ croissante.
5. $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists\, \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \quad |x-1| < \alpha \Rightarrow |3x-3| < \varepsilon.$
6. $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists\, \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \quad |x-1| < \alpha \Rightarrow |2x-1| < \varepsilon.$

Donner une traduction de 5 et 6 en termes de limites.

Exercice 2. Soient $n, k \in \mathbb{N}^*$. Montrer par l'absurde que, si l'on range $kn+1$ paires de chaussettes dans n tiroirs, au moins un tiroir contient au moins $k+1$ paires de chaussettes.

Applications

1. Le restaurant universitaire propose un choix de 5 menus. Montrer que parmi 11 étudiants ayant déjeuné à la cantine, 3 au moins ont mangé le même repas.
2. Soit une liste de n entiers $a_1, ..., a_n \quad (n \geq 1)$. Montrer qu'il existe un entier $l \in \{1, ..., n\}$ et l éléments consécutifs de la liste dont la somme est un multiple de n. C'est-à-dire, prouver qu'il existe $l \in \{1, ..., n\}$ et $k \in \{0, ..., n-l\}$ tels que :
$$a_{k+1} + a_{k+2} + ... + a_{k+l} \quad \text{est un multiple de } n.$$
[*On peut introduire les sommes :*
$$S_0 := 0,\ S_1 := a_1,\ S_2 := a_1 + a_2,\ ...,\ S_i := a_1 + a_2 + ... + a_i,\ ...,\ S_n := a_1 + a_2 + ... + a_n$$
et les ranger dans n tiroirs numérotés de 0 à $n-1$ en plaçant S_i $(0 \leq i \leq n)$ dans le tiroir portant le numéro « reste de la division euclidienne de S_i par n. »]

Exercice 3. On définit :

- la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -x^2 - 4x$,

- les ensembles $A :=]-\infty, -2[\cup]-2, 1]$ et $B :=]-\infty, 4[$.

Sans faire d'étude de fonction, en revenant aux définitions, montrer que $f(A) = B$.

Exercice 4.

1. Etudier la limite de $\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$ en 4.
2. Faire de même pour $\frac{\tan(x)-\sin(x)}{\sin^3(\frac{x}{2})}$ en 0.

Exercice 5.

1. On rappelle la définition de la partie entière, $E : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, $E(x)$ est l'unique entier relatif vérifiant :
$$E(x) \leq x < E(x) + 1.$$
Représenter graphiquement la fonction E.
2. Donner le domaine de définition de la fonction f définie par :
$$f(x) = \frac{x^4E(x) + 2x^3 + (21E(x^2) + 1)x}{x^3E(x) + 3x^2 + 21E(x^2)}.$$
3. A l'aide des théorèmes sur les limites, montrer que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$.
4. On veut maintenant retrouver le résultat précédent en utilisant seulement la définition de la limite.
   (a) Factoriser les polynômes $X^4 + X^3 - 3X^2 + 22X - 21$ et $2X^2 - 3X + 1$ par $X - 1$.
   (b) Calculer $f(x) - 1$ sur $]1, \frac{4}{3}[$ et déterminer une constante $A \in \mathbb{R}^{+*}$ telle que :
   $$1 < x < \frac{4}{3} \Rightarrow |f(x) - 1| < A|x - 1| \quad .$$
   En revenant à la définition, prouver alors que $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1$.
   (c) Calculer $f(x) - 1$ sur $]\frac{1}{2}, 1[$ et montrer que :
   $$\frac{1}{2} < x < 1 \Rightarrow |f(x) - 1| < 2|x - 1| \quad .$$
   Toujours en revenant à la définition, prouver alors que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1$.
   (d) Conclure.