Feuille n° 2

Exercice 1. Mettre sous forme de fractions irréductibles les nombres rationnels suivants, donnés par leurs développements décimaux périodiques :

$$x_1 = 3,14\overset{\frown}{14}\ldots \ ; \quad x_2 = 0,9\overset{\frown}{9}\ldots \ ; \quad x_3 = 3,149\overset{\frown}{9}\ldots$$

Exercice 2.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a : $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$.
2. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a
$$2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$$
3. En déduire un encadrement de la somme $\sum_{n=1}^{N} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, pour tout $N \geq 1$.
4. Quelle est la partie entière de $1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{10000}}$?
[*Encadrer séparément la somme de* $n = 2$ *à* $N = 10000$, *puis de* $n = 1$ *à* $N - 1$.]

Exercice 3. On note $E(x)$ la partie entière d'un réel x, c'est à dire $E(x)$ est l'unique entier relatif vérifiant $E(x) \leq x < E(x) + 1$.

1. Montrer que pour tout réels x et y, on a $E(x) + E(y) \leq E(x+y) \leq E(x) + E(y) + 1$.
2. Calculer $E(x) + E(-x)$ pour x réel.
3. Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$ et pour tout réel x, $E(x) = E\big(E(nx)/n\big)$.

Exercice 4. Comparer $6\sqrt{5}$ et $8\sqrt{3}$, puis $\dfrac{2}{\sqrt{6} - \sqrt{5}}$ et $\dfrac{3}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} + \dfrac{4}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$.

Exercice 5. Soient x et y des réels tels que $-5 \leq x \leq 4$ et $-10 \leq y \leq -6$.
Trouver des encadrements de $x + y$, $x - y$, xy, x/y et $\sqrt{x^2}$. Que peut-on dire de $1/x$?

- [*facultatif*] même question pour $-7 \leq x \leq 9$ et $-2 \leq y \leq -1$.
Réponse : $-9 \leq x + y \leq 8$; $-6 \leq x - y \leq 11$; $-18 \leq xy \leq 14$; $-9 \leq x/y \leq 7$; $0 \leq \sqrt{x^2} \leq 9$
- [*facultatif*] même question pour $-12 \leq x \leq 1$ et $-3 \leq y \leq 4$.
Réponse : $-15 \leq x + y \leq 5$; $-16 \leq x - y \leq 4$; $-48 \leq xy \leq 36$; $0 \leq \sqrt{x^2} \leq 12$.
x/y n'est pas défini pour $y = 0$ et $\{x/y \ ; \ -12 \leq x \leq 1 \text{ et } -3 \leq y \leq 4 \text{ et } y \neq 0\}$ est non borné.
- [*facultatif*] même question pour $3 \leq x \leq 4$ et $-5 \leq y \leq -3$
Réponse : $-2 \leq x + y \leq 1$; $6 \leq x - y \leq 9$; $-20 \leq xy \leq -9$; $-\frac{4}{3} \leq x/y \leq -\frac{3}{5}$; $3 \leq \sqrt{x^2} \leq 4$.

Exercice 6. Dans cet exercice, on demande d'utiliser les propriétés de la relation d'ordre dans $\mathbb{R}$ et non d'étudier les variations d'une fonction. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$\begin{array}{ll} a) & |x-3|+|x+4| \leq 7 \\ b) & 0 \leq \sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2+1} \leq 1 \\ c) & \sqrt{x^2-4x+4} \geq |\dfrac{3x}{2}-1| \\ d) & 0 < \dfrac{x}{x^2-1} < 1 \end{array}$$

Exercice 7. Résoudre sur $\mathbb{R}$ le système d'inéquations

$$\left\{ \begin{array}{rcl} |x+1| & < & \frac{5}{2} \\ \sqrt{x^2+x-2} & > & 1+\frac{x}{2}. \end{array} \right.$$

Exercice 8. Démontrer l'implication suivante :

$$|x| \leq 1 \Longrightarrow \left| \frac{x+\sin x}{x^7+x-3} \right| \leq 2$$

Exercice 9. Pour tout réel a non nul, on note $I_a = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| < |a|/2\}$.

1. Décrire en termes d'encadrement, puis en termes d'intervalle, l'ensemble I_a. Hachurer sur la droite réelle l'ensemble I_a pour $a=-2$ et $a=1$. Vérifier que pour tout $x \in I_a$, alors x est non nul et a même signe que a.
2. Peut-on dire qu'il existe une constante $m > 0$ indépendante de a telle que pour tout x appartenant à l'ensemble I_a, on ait $|x| > m$?

Exercice 10. Déterminer si les ensembles suivants sont bornés et en donner eventuellement des bornes.

$$\left\{ \frac{n-1}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}, \quad \{(-1)^n n \mid n \in \mathbb{N}\}, \quad \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Exercice 11. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $2 \leq |z| \leq 4$. Montrer que

$$\frac{1}{5} \leq \left| \frac{5-z}{i+z} \right| \leq 9.$$

Exercice 12. Trouver les racines carrées complexes des nombres complexes suivants :

$$Z_1 = -1 \ , \quad Z_2 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \ , \quad Z_3 = 1+i \ , \quad Z_4 = 5-12i \ , \quad Z_5 = \frac{2-i\sqrt{5}}{3} \ .$$

Pour les trois premiers, on donnera le résultat sous forme algébrique et trigonométrique ; pour Z_4 et Z_5, sous forme algébrique.

Exercice 13. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $z^2+(1-2i)z+1+5i=0$, b) $z^4+(1-2i)z^2-3-i=0$,

c) $(z+1)^4+16(z-1)^4=0$, d) $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^3+\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3=0$.

Exercice 14. Énoncer la formule du binôme $(z_1+z_2)^n$ et l'expliciter pour $n=5$. A l'aide de la formule d'Euler et de la formule précédente, exprimer $\cos^5(\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$, $\cos(3\theta)$ et $\cos(5\theta)$.
Plus difficile : essayer de généraliser la formuler pour $\cos^n(\theta)$.
Remarque : cette méthode sera réutilisée pour le calcul d'intégrales de fonctions trigonométriques.

Exercice 15. Somme géométrique :

1. Montrer que pour tout nombre complexe $z \neq 1$, $\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$. [*Formule à connaître.*]

2. Soit θ un nombre réel. on pose $Z_n = 1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta} + \cdots + e^{ni\theta} = \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}$. Simplifier l'expression de Z_n. En déduire des expressions simples de :

   - $C_n = 1 + \cos(\theta) + \cos(2\theta) + \cdots + \cos(n\theta) = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$
   - $S_n = \sin(\theta) + \sin(2\theta) + \cdots + \sin(n\theta) = \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$
   - $D_n(\alpha) = \cos(\alpha) + \cos(\alpha + \theta) + \cos(\alpha + 2\theta) + \cdots + \cos(\alpha + n\theta) = \sum_{k=0}^{n} \cos(\alpha + k\theta)$.

   [*Pour D_n, utiliser les formules précédentes*]

3. Déduire également de la question 1) que la somme des racines n-ièmes de l'unité est nulle.

Exercice 16.

1. Démontrer par récurrence par les formules suivantes :

   - $S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2}$ avec $S_1(n) = \sum_{k=0}^{n} k$,
   - $S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ avec $S_2(n) = \sum_{k=0}^{n} k^2$.

2. Retrouver la valeur de $S_2(n)$ par une preuve constructive. [*Ajouter membre à membre les développements de* $(1+1)^3, (2+1)^3, \cdots, (n+1)^3$ *obtenus par la formule du binôme et utiliser la valeur de* $S_1(n)$.]

3. [*facultatif*] Montrer (par récurrence ou de manière constructive) que

$$S_3(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = S_1(n)^2 \quad \text{avec} \quad S_3(n) = \sum_{k=0}^{n} k^3.$$