Variable complexe

18 septembre 2008

1 Les nombres complexes

Le corps des complexe $\mathbb{C}$ est l'ensemble des couples $z = (x, y)$ de $\mathbb{R}^2$ muni des opérations

$$(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v) \quad (Somme) \ , \quad ((x, y) . (u, v) = (xu - yv, xv + yu) \quad (Produit) \ .$$

Le premier terme x du couple (x, y) est appelé la partie réelle, l'autre terme y est appelé la partie imaginaire du nombre complexe z. On note $x = \mathcal{I}z$, $y = \mathcal{R}z$, puis $1 = (1, 0)$, $0 = (0, 0)$ et le nombre $(0, 1)$ est noté i . On remarque que $i^2 = (-1, 0) = -1$.

La notation algébrique est plus conviviale, consistant à utiliser 1 et i comme base. Ainsi le nombre $z = (x, y)$ s'écrira plus simplement $z = x + iy$. Ainsi, pour $w = u + iv$,

$$z + w = (x + u) + i (y + v) \quad , \quad zw = (xu - yv) + i (yu + xv) \ .$$

L'**inverse de** z est le nombre complexe w tel que $wz = 1$. Il est noté z^{-1}ou $\frac{1}{z}$. En notant $z = x + iy, \ w = u + iv$, alors $wz = 1$ donne $xu - yv + i (xv + yu) = 1$, ce qui conduit au système linéaire à deux équations

$$xu - yv = 1 \quad , \quad xv + yu = 0 \ ,$$

à résoudre en u et v. On obtient $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$, $v = \dfrac{-y}{x^2 + y^2}$. D'où $z^{-1} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$.

Le **complexe conjugué de** z est $\overline{z} = x - iy$.

Le **module de** z est le nombre réel positif $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Proposition 1.1 *Soit z un nombre complexe. Alors* $|z|^2 = z\overline{z}$.

Démonstration : on calcule $(x + iy) (x - iy) = x^2 + y^2 + i (xy - xy) = x^2 + y^2 = |z|^2$.

Proposition 1.2 *Soit $z, w \in \mathbb{C}$. Alors* $|z + w| \leq |z| + |w|$.

Démonstration : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $|z + \lambda w|^2 \geq 0$, ou encore $|z|^2 + 2\lambda (ux + vy) + \lambda^2 |w|^2 \geq 0$ .Il s'agit d'un polynôme du second degré en λ qui a au plus une seule racine. Son discriminant reste donc positif, c'est à dire $|ux + vy| \leq |z| |w|$. Ensuite,

$$|z + w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2 (ux + vy) \ \leq \ |z|^2 + |w|^2 + 2 |z| |w| = \left(|z|^2 + |w|\right)^2 ,$$

d'où le résultat.

La **forme trigonométrique ou polaire de** z consiste à poser $x = r\ cos\theta$, $y = r\ sin\theta$, avec $r \geq 0$. On obtient immédiatement $r = |z|$, et on pose par convention $e^{i\theta} = cos\theta + i\ sin\theta$; r est appelé le module de z , et θ l'argument de z. D'après les formules de trigonométrie classique, on retrouve la propriété $e^{i\,(\theta + \theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}$. Ainsi $z = r\ e^{i\theta}$qui est la forme polaire de z. La formule de Moivre $(cos\ \theta\ + i\ sin\ \theta)^n = cos(n\theta) + i\ sin(n\theta)$ pour n entier s'interprête trivialement ici : $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$.

Les **racines de l'unité**. Il s'agit de trouver, pour un entier $n \geq 1$ donné, les nombres complexes z tels que $z^n = 1$. En remarquant que pour tout entier k , $e^{2ik\pi} = 1$, on a aussi $z^n = e^{2ik\pi}$, ou encore $z = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, et il suffit de restreindre le choix de k à $k = 0, 1, 2, .., n-1$ pour obtenir n racines distinctes.

Exercices : Calculer les racines $n - ièmes$ de -1, de -2, de i.

2 La variable complexe

La plupart des fonctions réelles peut être généralisée en fonctions de la variable complexe z. Comme la somme et le produit ont déjà été introduits, les polynômes à coefficients complexes se définissent trivialement. Ayant aussi défini l'inverse d'un nombre complexe, les fractions rationnelles se définissent tout aussi trivialement.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction z^α est définie par $z^\alpha = r^\alpha\ e^{i\alpha\theta}$, lorsque $z = r\ e^{i\theta}$. Bien évidemment il faudra supposer $z \neq 0$ si $\alpha < 0$.

La fonction **exponentielle** se défini aussi très simplement par $e^z = e^{x+iy} = e^x cosy + ie^x siny$ lorsque $z = x + iy$. On retrouve les propriétés $e^{z+w} = e^z\ e^w$ et $e^0 = 1$. Par contre la positivité de l'exponentielle n'a plus cours, sa valeur étant complexe. Ayant défini l'exponentielle, on peut définir les fonctions trigonométriques et hyperboliques classiques :

$$cosz = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\ ,\ sinz = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\ ,\ chz = \frac{e^z + e^{-z}}{2}\ ,\ shz = \frac{e^z - e^{-z}}{2}\ .$$

On remarque les relations $ch(iz) = cosz$, $sh(iz) = i\ sinz$.

La fonction **logarithme** peut se définir à partir de la formulation polaire. Pour $z = re^{i\theta}$, on trouve a priori $ln(z) = ln(re^{i\theta}) = ln(r) + ln(e^{i\theta}) = ln(r) + i\theta$. Or on observe que si l'argument θ augmente de 2π, la valeur de z est inchangée, tandis que la valeur de $ln(z)$ change, sa partie imaginaire augmentant de 2π. Cette fonction n'est pas univoque (donc ce n'est pas a proprement parlé une fonction). Toutefois, on peut la définir de façon univoque en imposant par exemple $-\pi < \theta \leq \pi$. Ceci revient à interdire de franchir l'axe des x du côté des $x < 0$. On parle de **coupure** du plan complexe. Bien entendu, cette coupure pose un problème pour une application particulière, on peut choisir une autre demi droite issue de l'origine.

Exercices : Résoudre les équations suivantes : $e^z = -1,\ e^z = i,\ cosz = 2,\ chz = -1,\ chz = 0$.
Quelle est l'image de $\mathbb{C}$ par la fonction $z^{\frac{1}{2}}$? (prendre la coupure $-\pi < \theta \leq \pi$)
Quelle est l'image du disque $\{z \in \mathbb{C}\ \mid\ |z| < 1\}$ par la transformation $w = \frac{1}{z}$?
Quelle est l'image de l'extérieur du disque $\{z \in \mathbb{C}\ \mid\ |z| < 1\}$ par la transformation $w = \frac{1}{z}$?
Quelle est l'image du disque $\{z \in \mathbb{C}\ \mid\ |z| < 1\}$ par la transformation $w = z + \frac{1}{z}$?
Quelle est l'image de l'extérieur du disque $\{z \in \mathbb{C}\ \mid\ |z| < 1\}$ par la transformation $w = z + \frac{1}{z}$?

3 Intégrales curvilignes

Notations : Soit f une fonction définie sur une partie A de $\mathbb{C}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, dont la partie réelle est notée P et la partie imaginaire Q. Ainsi, pour $z = x + iy$, on adopte la notation $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$.

Définition 3.1 *Une fonction f est continue en $z_0 = x_0 + iy_0$ lorsque P et Q sont continues en (x_0, y_0). Une fonction f est continue sur une partie A de $\mathbb{C}$ lorsque pour tout $z_0 \in A$, f est continue en z_0.*

Exercices 1 *Montrer que la fonction $f(z) = e^z$ est continue sur $\mathbb{C}$.*
Montrer que la fonction $f(z) = \dfrac{1}{z}$ est continue en tout $z_0 \neq 0$.

Notations : Soit Γ un arc de courbe du plan, de représentation paramétrique $(x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$, un intervalle réel. On lui associe un arc (en fait, le même, qu'on note encore Γ) du plan complexe défini par $z(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in [a, b]$.

Définition 3.2 *Soit f une fonction définie sur Γ, à valeurs dans $\mathbb{C}$. L'intégrale curviligne de f sur Γ est définie par $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\ dz \ = \ \int_\Gamma Pdx - Qdy \ + \ i \ \int_\Gamma Qdx + Pdy$.*

Remarque 3.3 *Ceci revient tout simplement à développer le produit*

$$f(z)dz = (P(x, y) + iQ(x, y))\,(dx + idy) \ .$$

Proposition 3.4 *Si $x(t)$ et $y(t)$ sont continûment dérivables sur $[a, b]$, alors*

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_a^b \left(P(x(t), y(t))x'(t) - Q(x(t), y(t))y'(t)\right) dt + i\int_a^b \left(Q(x(t), y(t))x'(t) + P(x(t), y(t))y'(t)\right) dt.$$

Il s'agit d'une conséquence immédiate du calcul des intégrales curvilignes dans le plan.

Exercices 2 *Lorsque Γ est le cercle unité (centre 0, rayon 1) calculer les intégrales curvilignes*

$$\int_\Gamma \frac{1}{z}\ dz \ , \ \int_\Gamma \frac{1}{z^2}\ dz \ , \ \int_\Gamma z^n\ dz, \ \text{avec } n \in \mathbb{Z}.$$

Proposition 3.5 *Soit f et g deux fonctions définies sur Γ et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Alors*

$$\int_\Gamma (\lambda f(z) + \mu g(z))\ dz \ = \ \lambda \ \int_\Gamma f(z)\ dz \ + \ \mu \ \int_\Gamma g(z)\ dz \ .$$

Cette proposition confirme la linéarité de l'intégrale curviligne. Sa démonstration est immédiate, en utilisant la linéarité de l'intégrale curviligne dans le plan.

Proposition 3.6 *On suppose Γ régulier (c'est à dire $x(t)$, $y(t)$ continûment dérivables sur $[a,b]$) et f continue sur Γ. On note L la longueur de Γ. Alors, on a l'inégalité*

$$\left| \int_\Gamma f(z)\ dz \right| \leq L \ \ \underset{z\in\Gamma}{Sup}\ \ |f(z)| \ .$$

La démonstration se fait en évaluant $\left| \int_\Gamma f(z)\ dz \right|^2$ et en utilisant la paramétrisation par l'abscisse curviligne, ainsi que l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $\left| \int_0^L g(t)\ h(t)\ dt \right|^2 \ \leq \int_0^L g(t)^2 dt\ \int_0^L h(t)^2 dt$

4 Les fonctions holomorphes

Observation préalable Soit f une fonction définie sur une partie A de $\mathbb{C}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, et $z_0 \in \mathbb{C}$. On veut définir la dérivée de f en z_0. En utilisant la notation $f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$ et en interprêtant les formules $z = x + iy$, $\overline{z} = x - iy$ comme un changement de variables ($x = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$, $y = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$) on obtient

$$f(z) \ = \ P\left(\frac{z+\overline{z}}{2}, \ \frac{z-\overline{z}}{2i}\right) + i\ Q\left(\frac{z+\overline{z}}{2}, \frac{z-\overline{z}}{2i}\right) \ .$$

Dans cette équation, seul le second membre fait apparaître $\overline{z}$. Si on suppose P et Q continument dérivable, la dérivation de cette équation par rapport à la variable $\overline{z}$ conduit à la formule

$$0 \ = \ \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\ \right) + i\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\right) \ .$$

Ainsi, la partie réelle est nulle, ainsi que la partie imaginaire, d'où les **conditions nécéssaires** suivantes , dites **conditions de Cauchy**,

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \ \ , \ \ \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \ .$$

Définition 4.1 *Une fonction f est* **holomorphe** *en un point $z_0 \in \mathbb{C}$ lorsque P* et *Q sont continûment dérivables en (x_0, y_0) avec $x_0 + iy_0 = z_0$, et vérifient les conditions de Cauchy.*

Remarque 4.2 *On en déduit immédiatement la dérivée de f, donnée par*

$$f'(z) = \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \ \ = \ \ \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) - i\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \quad avec\ z = x+iy.$$

Ainsi les conditions de Cauchy sont des conditions nécessaires pour assurer la dérivabilité de $f(z)$.

Exercices 1 *Montrer que l'ensemble des fonctions holomorphes est un espace vectoriel sur* $\mathbb{C}$.

On suppose P *et* Q *deux fois continument dérivables. Montrer que les conditions de Cauchy impliquent que* P *et* Q *sont* **harmoniques**, *c'est à dire* $\Delta P = 0$, $\Delta Q = 0$ *,où* Δ *représente l'opérateur de Laplace* $\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.

Montrer que $P(x,y) = Atan(\frac{y}{x})$ *est harmonique et rechercherune fonction* $Q(x,y)$ *telle que* $f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$ *soit holomorphe.*

Proposition 4.3 (définition équivalente) *Si* f *est continûment dérivable sur une partie* A *de* $\mathbb{C}$, *elle est holomorphe sur* A.

Théorème 4.4 *Soit* $A \subset \mathbb{C}$, *et* Ω *un domaine de frontière* Γ *fermée, tel que* Ω *et* Γ *soient contenus dans* A, *et* f *une fonction holomorphe sur* A. *Alors* $\int_\Gamma f(z)dz = 0$.

Démonstration : il suffit d'appliquer deux fois la formule de Green-Riemann, une fois pour la partie réelle et une autre fois pour la partie imaginaire, puis les formules de Cauchy.

5 Les transformations conformes

Définition 5.1 *Une transformation conforme de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}^2$ *est une transformation qui conserve les angles orientés.*

De telles transformations sont importantes en pratique ; par exemple la transformation de Mercator permet de construire des cartes sur lesquelles les caps (terme marin) sont les caps réels. Les translations, les homothéties, les rotations sont des transformations conformes. Les transformations affines sont toutes de la forme $u = u_0 + ax + by$, $v = v_0 + cx + dy$. Dans le plan compexe, la combinaison d'une homothétie (coefficient K) et d'une rotation (d'angle ϕ) prend la forme $u + iv = K\ e^{i\phi}(x + iy)$, ou encore $u = K\ cos\phi\ x\ -\ K\ sin\phi\ y$, $v = K\ cos\phi\ y\ +\ K\ sin\phi\ x$. On remarque que $a = K\ cos\phi = d$, $b = -K\ sin\phi = -c$, dont on retient $a = d,\ b + c = 0$.

Considérons maintenant le début d'un développement limité de P en un point (x_0, y_0) : $P(x,y) = P(x_0,y_0) + \frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0)(x - x_0) + \frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0)(y - y_0) + ...$et de même pour Q : $Q(x,y) = Q(x_0,y_0) + \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0)(x - x_0) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0)(y - y_0) + ...$ Avec les notations précédentes (a,b,c,d) on obtient $a = \frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0)$, $b = \frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0)$, $c = \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0)$, $d = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0)$. Les conditions de Cauchy reviennent à écrire $a = d$ et $c + b = 0$. On vérifie ainsi le résultat :

Théorème 5.2 *Une fonction holomorphe correspond à une transformation conforme du plan.*

Les fonctions harmoniques interviennent dans de nombreuses applications physiques en régime permanent : la chaleur en thermique, le potentiel en électrostatique, le potentiel des vitesses dans les écoulements incompressibles, etc... La transformation conforme permet de réduire le difficulté liée à la géométrie du problème.

Exemple 5.3 *La bande* $\Omega = \{w = u + iv \mid u \in \mathbb{R},\ 0 < v < \pi\}$ *se transforme en le demi plan* $\{z = x + iy \mid x \in \mathbb{R},\ y > 0\ \}$ *par la trtansformation* $z = e^w$. *On peut ainsi passer de l'écoulement issu d'une source ponctuelle placée en* $z = 0$ *en un écoulement uniforme dans un canal, et réciproquement. L'expression du potentiel des vitesses est immédiat dans le canal, il s'agit de* v *(les lignes* $v = Constante$ *sont les lignes de courant). On en déduit le potentiel des vitesses dans* Ω, *à savoir* $v = Atan(\dfrac{y}{x})$, *ce qui est moins immédiat. Une interprétation thermique nous donnerait les isothermes, issues du point* $z = 0$, *et une interprétation électrostatique nous donnerait les équipotentielles.*

Exercice On considère le rectangle infini $\Omega = \{w = u + iv \mid -\dfrac{\pi}{2} < u < \dfrac{\pi}{2}\ ,\ v > 0\ \}$. Construire son image par la transformation $z = sinw$. En déduire les lignes de courant d'un écoulement dans une cavité rectangulaire.

Exemple 5.4 *Sur la droite réelle, on construit une suite (finie) croissante de points* $a_1, a_2, .., a_n$ *affectés des coefficients* $\alpha_k \in [0, 2],\ k = 1, 2, .., n$. *Alors, la transformation suivante, dite de Schwartz-Christoffel,*

$$f(z) = C \int_{z_0}^{z} \prod_{k=1}^{n} (z - a_k)^{\alpha_k - 1}\ \ dz\ +\ w_0$$

trnsforme le demi plan $\{y > 0\}$ *en l'intérieur d'un polygone de sommets* $A_1 = f'a_1),\ A_2 = f(a_2), ..\ A_n = f(a_n)$ *et d'angles aux sommets respectifs* $\alpha_1\pi,\ \alpha_2\pi, .., \alpha_n\pi$. *Les paramètres* C, z_0 *et* w_0 *sont des constantes à déterminer. Si l'un des sommets est situé à l'infini, il suffit d'exclure le facteur* $(z - a_k)$ *correspondant du produit.*

Ainsi, l'écoulement autour d'une digue représenté par le segment imaginaire $[0, i]$, *c'est à dire dans* $\Omega = \{w = u + iv \mid v > 0\ si\ u{\neq}0\ et\ v > 1\ si\ u = 0\}$ *peut être obtenu en utilisant la transformation*

$$f(z) = \int_{z_0}^{z} z(z^2 - 1)^{-\dfrac{1}{2}}\ dz\ =\ (z^2 - 1)^{\dfrac{1}{2}}\ .$$

La partie imaginaire correspond à la fonction harmonique

$$Q(x, y) = \left((x^2 - y^2 - 1)^2 + 4x^2y^2\right)^{\dfrac{1}{4}}\ sin\left(Atan\left(\frac{xy}{x^2 - y^2 - 1}\right)\right)$$

qui n'est pas tout à fait immédiate...

6 Les séries de Laurent

La notion de série entière se généralise immédiatement au cas complexe, en posant $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\ z^n$ .Le rayon de convergence R est tel que la série numérique des modules $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\ \ |z|^n$ converge si $|z| < R$ et diverge si $|z| > R$.

Par exemple, la formule $\dfrac{1}{1-z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ est valable pour $|z| < 1$, bien que l'expression $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ ait un sens pour $|z| > 1$. On peut écrire

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{z}\,\frac{1}{\frac{1}{z}-1} = -\frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} z^n \;.$$

Cette série converge pour $|z| > 1$ et diverge pour $|z| < 1$.

Définition 6.1 *On appelle* **série de Laurent** *une série de la forme* $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\, z^n$, *avec* $c_n \in \mathbb{C}$.

Le domaine de convergence d'une série de Laurent est en général une couronne $R_1 < |z| < R_2$.

Exemple 6.2 *On veut développer en série de Laurent la fonction* $f(z) = \dfrac{1}{1-3z+2z^2}$. *Les racines du dénominateur sont* 1 *et* $\dfrac{1}{2}$. *D'où* $f(z) = \dfrac{2}{1-2z} - \dfrac{1}{1-z}$. *On va considérer trois cas :*

si $|z| < \dfrac{1}{2}$, $f(z) = 2\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(2z)^n - \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(2^{n+1}-1\right)\, z^n$,

si $\dfrac{1}{2} < |z| < 1$, $f(z) = -\dfrac{1}{z\left(1-\dfrac{1}{2z}\right)} - \dfrac{1}{1-z} = -\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}z^n} - \sum_{n=0}^{\infty} z^n$,

et si $|z| > 1$, $f(z) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2^{n-1}}\right)\,\frac{1}{z^n}$.

Notation 1 *On note* Γ_r *le cercle de centre* 0 *et de rayon* $r > 0$. *On considère le développement en série de Laurent* $f(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, z^n$ *tel que* Γ_r *soit dans la couronne de convergence.*

Proposition 6.3 *Pour tout* $k \in \mathbb{Z}$, $c_k = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{\Gamma_r}\frac{f(z)}{z^{k+1}}\,dz$.

Cette formule se démontre en introduisant la série $f(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, z^n$ dans l'intégrale, et en remarquant que $\displaystyle\int_{\Gamma_r}\frac{dz}{z^m} = 0$ *si* $m \neq 1$ ($m \in \mathbb{Z}$), $\displaystyle\int_{\Gamma_r}\frac{dz}{z} = 2i\pi$. Cette formule permet d'évaluer les coefficients c_n.

Remarque 6.4 *Lorsque* $r = 1$, *la série de Laurent prend la forme* $f(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{in\theta}$, *en posant* $z = e^{i\theta}$. *On retrouve les séries de Fourier dans leur version complexe.*

Théorème 6.5 *Soit f une fonction holomorphe dans la couronne $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \; R_1 < |z| < R_2\}$ pour $0 \leq R_1 < R_2$. Alors, pour tout $z \in \Omega$, f est développable en série de Laurent, soit $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \; z^n$, les coefficients c_n étant donnés dans la Proposition 6.3 ci dessus.*

Ce résultat est admis. Il s'ensuit immédiatement que f est indéfiniment dérivable sur Ω.

7 La formule de Cauchy et les résidus

Les résultats précédents peuvent être translatés en un point $z_0 \neq 0$, en introduisant le développement de Laurent en ce point z_0, $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \; (z - z_0)^n$. Bien entendu, $c_0 = f(z_0)$. Plus généralement, on a le résultat suivant :

Théorème 7.1 (formules de Cauchy) *Soit f une fonction holomorphe sur une partie Ω de $\mathbb{C}$ et D un domaine inclus dans Ω, de frontière Γ régulière, orientée positivement et incluse dans l'intérieur de Ω, puis $z_0 \in D$. Alors*

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0} \, dz \quad , \quad f^{(p)}(z_0) \; = \; \frac{p!}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{p+1}} \, dz \quad (p \in \mathbb{N}) \; .$$

La démonstration est immédiate, en utilisant le développement de Laurent en z_0.

Définition 7.2 *Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, et f une fonction holomorphe sur la couronne $\Omega_0 = \{z \in \mathbb{C} \;\mid\; 0 \leq |z - z_0| < R\}$ avec $R > 0$. S'il est non nul, le coefficient c_{-1}du développement de Laurent de f en z_0, est appelé* **résidus de f en z_0.** *Il est noté $c_{-1} = Rés(f; z_0)$. Le point z_0 est appelé* **point singulier isolé** *de f. Si c_{-p}, $p \in \mathbb{N}^*$ est non nul, z_0 est appelé point isolé d'ordre p de f.*

Théorème 7.3 des résidus *On reprend les domaines Ω et $D \subset \Omega$, de frontière Γ orientée positivement, régulière et incluse dans Ω. Le domaine D est supposé borné. On suppose que Γ ne contient aucun point isolé de f, et que D contient k points isolés z_1, $z_2, .., z_k$ de f. Alors*

$$\int_\Gamma f(z) \; dz \;\; = \;\; 2i\pi \; \sum_{j=1}^{k} Rés(f, z_j) \; .$$

Cette formule permet de calculer des intégrales généralisées. Le calcul des résidus est très souvent évident. Par exemple, si f est de la forme $f(z) = \frac{u(z)}{v(z)}$, $v(z)$ admettant une racine simple en z_0, alors $Rés(f, z_0) = \frac{u(z_0)}{v'(z_0)}$. Les lemmes de Jordan suivants permettent de calculer des intégrales.

Lemme 7.4 (Jordan n ° 1) *Soit C_R un arc de cercle de centre 0, de rayon R et d'angle au centre α; on suppose que $zf(z)$ tend vers zéro lorsque $|z| = R$ tend vers l'infini. Alors*

$$\lim_{R \longrightarrow \infty} \int_{C_R} z \; f(z) \; dz \;\; = \;\; 0 \; .$$

La démonstraion de ce lemme est immédiate par le changement de variable $z = Re^{i\theta}$ et des estimations classiques.

Application : On veut calculer l'intégrale d'une fraction rationelle $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(x)}{q(x)}\, dx$, où g et q sont des polynômes, avec $dq \geq dg + 2$, q n'ayant pas de racines réelles. Pour cela on considère la fonction $f(z) = \frac{g(z)}{q(z)}$, et on recherche les racines z_j de $q(z)$ à partie réelle positive. Ensuite l'intégration de $f(z)$ sur un contour Γ_R constitué de l'intervalle $[-R, R]$ et du demi cercle de centre 0, rayon R conduit à la formule $\int_\Gamma f(z)\, dz \;=\; 2i\pi \sum_{j=1}^{k} Rés(f, z_j)$. Les résidus sont de la forme $\frac{g(z_j)}{q'(z_j)}$, et lorsque R tend vers l'infini, d'après le lemme de Jordan n ° 1, l'intégrale sur le demi cercle tend vers zéro, et il reste la formule

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(x)}{q(x)} dx \;=\; 2i\pi \sum_{j=1}^{k} \frac{g(z_j)}{q'(z_j)} \; .$$

Par exemple, pour calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$, on utilise la (seule) racine $z_1 = i$ de $q(z) = 1 + z^2$, d'où

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} \;=\; 2i\pi\, \frac{1}{2i} \;=\; \pi \; .$$

Lemme 7.5 (Jordan n ° 2) *Soit f une fonction holomorphe définie sur la couronne $\Omega_r = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < r\}$, pour $r > 0$, et γ_r un arc de cercle de centre 0, de rayon r et d'angle au centre α , admettant en $z = 0$ un résidu $Rés(f, 0)$ (qui peut être nul si f est bornée en $z = 0$) . Alors*

$$\lim_{r \longrightarrow 0} \int_{\gamma_r} f(z)\, dz \;=\; i\, \alpha\, Rés(f, 0)$$

.

Application : On peut en déduire $\int_0^\infty \frac{sin\ x}{x}\, dx \;=\; \frac{\pi}{2}$, en considérant la fonction $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ et un contour Γ constitué du segment $[r, R]$, des deux quarts de cercle (d'angle au centre $\frac{\pi}{2}$) et du segment $[ir, iR]$ de l'axe imaginaire, orienté positivement. Comme $f(z)$ n'a aucun point singulier à l'intéruer de Γ, $\int_\Gamma f(z)\, dz = 0$, et en particulier sa partie imaginaire est nulle. Il reste à faire tendre R vers $+\infty$ (Jordan n ° 1) et r vers zéro (Jordan n ° 2). En considérant la partie réelle, on obtient $\int_0^\infty \frac{cox\ x \;-\; e^{-x}}{x}\, dx \;=\; 0$.

Application : Pour évaluer une intégrale de la forme $\int_0^{2\pi} f(\theta)\, d\theta$ il peut être avantageux de poser $z = e^{i\theta}$ ($d\theta = \frac{dz}{iz}$), ce qui transforme cette intégrale en une intégrale sur le cercle unité Γ. Ainsi, par exemple,

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + cos^2\theta} \;=\; \frac{2}{i} \int_\Gamma \frac{dz}{1 + 4z + z^2} \quad .$$

Il reste à dénombrer les résidus des points isolés de $\dfrac{1}{1+4z+z^2}$ situés à l'intérieur de Γ. Il n'y a ici qu'un seul point isolé intérieur à Γ, il s'agit de $z_0 = -2+\sqrt{3}$. Le résidu correspondant vaut $Rés\left(\dfrac{1}{1+4z+z^2}, -2+\sqrt{3}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$, d'où

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+cos^2\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \quad .$$

8 Exercices

1 $^\circ$- On pose $P(x,y) = \phi(\frac{y}{x})$. Déterminer ϕ de telle façon que P soit harmonique. Rechercher ensuite la fonction Q (dite harmonique conjuguée à P) réalisant avec P les conditions de Cauchy. Donner ensuite la fonction holomorphe $f(z)$ associée, puis le développement en $z=0$ de $f(z)$ en série de Laurent.

2 $^\circ$- Calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx$. (Rép. $\pi\sqrt{2}$).

3 $^\circ$- Calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{cos^2(2\theta)}{1-2a\ cos\ \theta\ +\ a^2}\,d\theta$ *et* $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{cos\ \theta}{1-2a\ cos\theta\ + a^2}\,d\theta$, *pour* $|a| < 1$

(Rép. $\pi\dfrac{1+a^4}{1-a^2}$, $\dfrac{a\pi}{1-a^2}$).