Université de Bordeaux I 2006 - 2007
MAP 401, série INF 3 -

Exercices de Travaux Dirigés
Feuille 1

Cette fiche porte sur une révision de notions étudiées au semestre 1 ou 2 :
- *définition d'une application d'un ensemble E dans un ensemble F*
- *définition de l'image reciproque.*
- *application injective, surjective, bijective,*
- *application linéaire injective, surjective, bijective.*

Exercice 1: caractérisation des applications injectives, surjectives, bijectives lorsque les ensembles de départ et d'arrivé sont finis.

Soient E et F des ensembles non vides finis et une application $f : E \to F$.

1) Montrer que f est injective si et seulement si $card(f(E)) = card(E)$.

2) Montrer que f est surjective si et seulement si $card(f(E)) = card(F)$.

3) On suppose que $card(E) = card(F)$. Montrer :

$$f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective} \iff f \text{ est bijective}$$

4) Lorque E et F ne sont pas des ensembles finis montrer que les équivalences de la question 3 sont fausses. (On pourra utiliser les applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, $n \to 2n$ et $n \to [n/2]$ où $[x]$ désigne la partie entière de x.)

Exercice 2 :caractérisation de l'image reciproque.

Soient A et B deux ensembles non vides et $f : A \to B$ une application.

1) Montrer que $\{f^{-1}(z)\}_{z\in B}$ est une partition de A.

2) Soient $A = B = \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{N}^*$ et l'application f c'est la reste de la devision par a.

a)Montrer que f ni injective ni surjective.

b)Déterminer l'image de f . Déterminer le noyau de f .

c)Déterminer $f^{-1}(y)$ pour tout $y \in \mathbb{N}$. En déduire le noyau de f.

Exercice 3 : composition de fonctions injectives et surjectives.

Soient A, B et C des ensembles non vides et $f : A \to B$, $h : B \to C$, $k : C \to A$ des applications.

1) Si $h \circ f$ est injective que peut-on dire des applications h et f ?

2) Si $h \circ f$ est surjective que peut-on dire des applications h et f ?

3) Montrer que si $h \circ f$ et $k \circ h$ sont bijectives alors f, h, k sont bijectives.

Exercice 4 : pour réviser le cours du semestre 2 sur les applications linéaires.

Soient E, F des espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F.

1) Montrer que f est injective si et seulement si $\ker f = \{0_E\}$.

2) On suppose F de dimension fini. Montrer que f est surjective si et seulement si $\dim f(E) = \dim F$.

Exercice 5 : cet exercice est un peu plus difficile que les précédents.

Soient E un ensemble, f une application de E dans $P(E)$ (l'ensemble des parties de E), et $A = \{x \in E \ : \ x \notin f(x)\}$.

1) Si $card(E) = n$, quel est le cardinal de $P(E)$? En déduire que si E est fini alors l'application f n'est pas surjective.

2) On ne suppose pas ici que E est fini. Montrer qu'il n'existe aucun $x \in E$ tel que $A = f(x)$. En déduire un élément de l'ensemble d'arrivée qui n'a pas d'antécédent par f.

Exercice 6

Soient E, F, G des ensembles, $f : E \to F$ et $g : E \to G$ des apllications.

1)Montrer qu'il existe une application $h : G \to F$ telle que $h \circ g = f$ si et seulement si

$$g(x) = g(x') \Longrightarrow f(x) = f(x')$$

2) On suppose que g est surjective et que h existe. Montrer :

- h est surjective si et seulement si f est surjective.
- h est injective si et seulement si $(f(x) = f(x') \Longrightarrow g(x) = g(x'))$.