Université de Bordeaux I 2006 - 2007
MAP 401, série INF 3 -

Exercices de Travaux Dirigés
Feuille 2

Cette fiche porte sur les relations d'équivalences. Vous devez savoir :
- *définition d'une relation d'équivalence*
- *définition d'une classe d'équivalence.*
- *savoir associer à une relation d'équivalence sur E une partition de E*
- *ensemble quotient de E par une relation d'équivalence*

Exercice 1 : Relations d'équivalences sur $\mathbb{Z}$
1) Montrer que la relation notée $\equiv$ définie sur $\mathbb{Z}$ par
$$a \equiv b \text{ si } a - b \text{ est un multiple de } 3$$
est une relation d'équivalence.
Décrire les classes déquivalences et la partition de $\mathbb{Z}$ associée.
2) Soit $n \geq 1$ un entier. Montrer que la relation notée $\equiv$ définie sur $\mathbb{Z}$ par
$$a \equiv b \text{ si } a - b \text{ est un multiple de n} \qquad (*)$$
est une relation d'équivalence.
Décrire les classes déquivalences et la partition de $\mathbb{Z}$ associée.
Remarque : pour (*) on écrira $a \equiv b$ modulo n qu'on lira a est congru à b modulo n. L'ensemble dont les éléments sont les classes d'équivalences de cette relation se note $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Exercice 2 : Relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$
Montrer que la relation notée $\equiv$ définie sur $\mathbb{R}$ par
$$a \equiv b \text{ si } (a - b) \in 2\pi\mathbb{Z}$$
est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.
Décrire les classes déquivalences.

Exercice 3 : une relation d'équivalence sur les matrices carrées $M_n(\mathbb{R})$.
Rappel : La matrice M de $M_n(\mathbb{K})$ est semblable à matrice N de $M_n(\mathbb{K})$ si il existe une matrice P inversible telle que $N = P^{-1}MP$.
Soit $n \geq 1$ un entier et $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à cœficients dans $\mathbb{R}$. Montrer que la relation $\sim$ définie sur $M_n(\mathbb{R})$ par $M \sim N$ si M est semblable à N est une relation d'équivalence.
Remarque. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ et B, B' deux bases de $\mathbb{R}^n$, alors les matrices de f dans les bases B et B' sont semblables.

Exercice 4 :
Dans $\mathbb{R}$ on considère la relation $\mathcal{R}$ définie par :
$$(a\mathcal{R}b) \Longleftrightarrow (a - b = a^3 - b^3)$$
a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation déquivalence.
b) Discuter, suivant a, le nombre d'éléments de la classe d'équivalence de a.

Exercice 5 :
1) Soient E et F des ensembles et une application $f : E \to F$. Montrer que la relation R définie sur E par $a\,R\,b$ si $f(a) = f(b)$ est une relation d'équivalence. Décrire les classes d'équivalences.
2) Dans chacun des cas suivants décrire les classes d'équivalences.
a) $E = F = \mathbb{R}$ et f définie par $f(x) = x^2$.
b) $E = F = \mathbb{R}$ et f définie par $f(x) = \sin(x)$.

Exercice 6 : Une construction de $\mathbb{Q}$ à partir de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$.

Montrer que la relation $\sim$ définie sur l'ensemble $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ par

$$(a,b) \sim (c,d) \text{ si } ad = bc$$

est une relation d'équivalence.

Décrire les classes d'équivalences. Que peut-on dire de l'ensemble quotient ?

Exercice 7 : Une construction de $\mathbb{Z}$ à partir de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. 1) Montrer que la relation $\sim$ définie sur l'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ par $(a,b) \sim (c,d)$ si $a - d = b - c$ est une relation d'équivalence.
2) Montrer que chaque classe admet un représentant de la forme $(n,0)$ ou $(0,n)$ où n est un entier naturel.
3) Montrer que l'application de $\mathbb{N}$ dans l'ensemble quotient, qui à l'entier n associe la classe de $(n,0)$ est injective.
4) Construire une bijection de l'ensemble quotient dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 8:

Pour $a \in \mathbb{R}$ on note E_a la droite de $\mathbb{R}^2$ passant par le point $(0,a)$ et de vecteur directeur $(1,1)$.
1) Montrer que $\{E_a \ : \ a \in \mathbb{R}\}$ est une partition de $\mathbb{R}^2$.
2) Définir une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{R}^2$ dont les classes d'équivalence sont les ensembles E_a.

Exercice 9:

Soient E un ensemble non vide muni d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$, u la surjection canonique de E sur $E/\mathcal{R}$, F un ensemble non vide muni d'une relation d'équivalence $\mathcal{S}$, v la surjection canonique de F sur $F/\mathcal{S}$ et f une application de E dans F. On dit que f est compatible avec $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ si

$$(x \in E, x' \in E, x\mathcal{R}x') \implies (f(x)\mathcal{S}f(x'))$$

1) Montrer que si f est compatible avec $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$, alors il existe une application $h : E/\mathcal{R} \to F/\mathcal{S}$ telle que $v \circ f = h \circ u$.
2) Montrer la réciproque de la question 1.
3) Soient n, m deux entiers non nuls, u l'application canonique de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et v l'application canonique de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur n et m pour qu'il existe une application $h : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ telle que $v = h \circ u$.

Si cela est possible construire h lorsque $n = 6$ et $m = 3$.

Exercice 10: Reletion d'équivalence et groupe

Soit $(G, *)$ un groupe non commutatif ; on note e l'élément neutre. On définit sur G la relation $\mathcal{R}$ par $x\mathcal{R}y$ s'il existe s$\in G$ tel que $y = s * x * s'$ (s' désigne ici l'inverse de s par la loi *).
a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sue G.
b) Déterminer la classe de e par $\mathcal{R}$.