Université de Bordeaux I 2006 - 2007
MAP 401, série INF 3 -

Exercices de Travaux Dirigés
Feuille 4

Cette fiche porte sur:
- *Homomorphismes de groupes.*
- *Les sous-groupes.*

I- Homomorphismes de groupes.

Exercice 1. Soient $(G,\star)$ et $(G',*)$ deux groupes d'élément neutre e et e', et f un homomorphisme de G dans G'.
1) Montrer que $f(e)=e'$ et $f(x^{-1})=(f(x))^{-1}$.
2) Montrer que $\ker f$ est un sous-groupe de G.
3) Montrer que $f(G)$ est un sous-groupe de G'.

Exercice 2.
Soient a un réel strictement positif différent de 1 et f l'application du groupe additif $\mathbb{R}$ dans le groupe multiplicatif $]0,+\infty[$ définie par $f(x)=a^x$.
Montrer que f est un isomorphime de groupes.

Exercice 3. Soient G un groupe et f l'application de G dans G définie par $f(x)=x^{-1}$.
Montrer que f est un homomorphisme de groupes si et seulement si G est abélien.

Exercice 4. Montrer que tout groupe cyclique d'ordre n est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

II- Exemples de sous-groupes.

Exercice 1 : sur les sous groupes de $(\mathbb{Z},+)$.
a. Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{Z},+)$. Montrer que soit $G=\{0\}$ soit il existe un entier $a>0$ tel que $G=a\mathbb{Z}$.
b. Soit $G=\{8a+12b\,:\,(a,b)\in\mathbb{Z}^2\}$ Montrer que G est un sous-groupe de $(\mathbb{Z},+)$ et déterminer $a>0$ tel que $G=a\mathbb{Z}$.
c. Soit $G=8\mathbb{Z}\cap 12\mathbb{Z}$. Montrer que G est un sous-groupe de $(\mathbb{Z},+)$ et déterminer $a>0$ tel que $G=a\mathbb{Z}$.
d. Soient x,y deux entiers. Déterminer, en fonction de x et y le sous groupe de $(\mathbb{Z},+)$ engendré par x et y ainsi que $x\mathbb{Z}\cap y\mathbb{Z}$.

Exercice 2 : sur un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*,.)$. (Les racines $6^{\text{ièmes}}$ de l'unité)
Soit $\omega=\cos(\frac{\pi}{3})+i\sin(\frac{\pi}{3})=e^{\frac{2i\pi}{6}}$.

a. Calculer ω^3 et ω^6 et résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $\omega^n=1$. En déduire que $\omega^r=\omega^s$ si et seulement si $r\equiv s\ [6]$.
b. On note $G=\{1,\omega,\omega^2,\omega^3,\omega^4,\omega^5\}$, $H=\{1,\omega^2,\omega^4\}$ et $K=\{1,\omega^3\}$.
Montrer que $(G,\times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*,\times)$, puis que H,K sont des sous-groupes de G.
c. Déterminer tous les sous groupes de G.

Exercice 3. Déterminer les sous-groupes de $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z},+)$.

Exercice 4 : les groupes d'ordre 4.
a. Montrer que $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z},+)$ est un groupe cyclique
Vérifier que $\overline{3}$ est un générateur.

Déterminer les sous groupes de $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$.

b. Donner la table de $G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$.

Montrer que G n'est pas cyclique et donner l'ordre de chacun de ses éléments

Déterminer les sous groupes de G.

c. Soit $(H, .)$ un groupe d'ordre 4 admettant un élément a, distinct de l'élément neutre, qui n'est pas d'ordre 2. Montrer que l'application $f : H \to H$ définie par $f(x) = a.x$ est bijective. En déduire que a est d'ordre 4 et que H est cyclique.

En déduire que tout groupe d'ordre 4 est soit cyclique soit tous ses éléments, sauf le neutre, sont d'ordre 2.

Exercice 5.

Pour $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ on note $f_{a,b}$ l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f_{a,b}(x) = ax + b$, G l'ensemble des applications $f_{a,b}$ et $\mathcal{S}(\mathbb{C})$ le groupe des bijections de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

a. Montrer que G est un sous groupe non commutatif de $\mathcal{S}(\mathbb{C})$.

b. Déterminer deux sous groupes commutatifs de G. (L'un est celui des translations l'autre celui des homothéties.)

Exercice 6. Sous-groupe distingué

Soit $f : G \to H$ un morphisme de groupes, et K un sous-groupe distingué de H. Montrer que $f^{-1}(K)$ est un sous-groupe distingué de G.

Exercice 7. Sous-groupe distingué

Soient H et K deux sous-groupes d'un groupe G,

1. Si $H \lhd G$, alors $HK = KH$ est un sous-groupe de G.
2. Si $H \lhd G$ et $K \lhd G$, alors $HK \lhd G$.